Maria Romanowska

UDOWODNIJ, ŻE...

Rozwiązania zadań

Matematyka dla liceum ogólnokształcącego
i technikum
w zakresie podstawowym i rozszerzonym

Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Opolu
Publiczne Liceum Ogólnokształcące Nr II w Opolu
Wydawnictwo NOWIK sp.j.

OPOLE 2013

Wydawnictwo Nowik Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Wydanie drugie poprawione, Opole 2013
ISBN: 978-83-62687-27-5

Wydanie we współpracy z:
Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Opolu
ul. Wróblewskiego 7, 45-760 Opole, tel. 77 474 00 86

Publiczne Liceum Ogólnokształcące Nr II
Oddziałami Dwujęzycznymi w Opolu
ul. Pułaskiego 3, 45-048 Opole

Szanowny Czytelniku, jeżeli chcesz wyrazić swoją opinię na temat tej publikacji,
prosimy o kontakt mailowy matma@nowik.com.pl
lub wypełnienie formularza na naszej stronie www.nowik.com.pl

Wydrukowane w Polsce
Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na www.nowik.com.pl

Dystrybucja:
Wydawnictwo Nowik Sp.j. Biuro Handlowe:
45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104
Tel./fax 77 454 36 04
http://www.nowik.com.pl e-mail: biuro@nowik.com.pl

DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH

1. Wykaż, że liczba jest liczbą parzystą.

D:$x = 3^8 - 1 = (3^4 - 1)(3^4 + 1) = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) = 8 \cdot 10 \cdot (3^4 + 1) = 2 \cdot \underbrace{40 \cdot (3^4 + 1)}_{k \in N} =$

$= 2k$ – liczba parzysta

2. Wykaż, że liczba$5^9 - 1$ jest podzielna przez 4.

D: Korzystamy z własności: $a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1})$.

$x = 5^9 - 1 = (5 - 1)\underbrace{(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8)}_{k \in N} = 4k$

3. Liczby n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ są kolejnymi liczbami naturalnymi. Wykaż, że różnica iloczynów liczby pierwszej i czwartej oraz drugiej i trzeciej jest równa -2.

Z: $n, n + 1, n + 2, n + 3$ – kolejne liczby naturalne

D: $n(n + 3) - (n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n - n^2 - 3n - 2 = -2$

4. Wykaż, że liczba 44000 ma 48 dzielników.

Z: $x = 44000$

D: Liczbę 44000 po rozłożeniu na czynniki można przedstawić w postaci $44000 = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11$. Korzystając z własności, że jeśli liczba $x = 2^n \cdot 5^k \cdot 11^m, n, k, m \in N$, to liczba x ma

$(n + 1)(k + 1)(m + 1) = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ dzielników.

5. Uzasadnij, że $\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 1$.

D: $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$

$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|2-\sqrt{3}|=$

$=-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1.$

6. Wykaż, że $\frac{55552}{55555}<\frac{77774}{77777}$.

D: Niech $a=\frac{55552}{55555}$, $b=\frac{77774}{77777}$ i $a-b=\frac{55552}{55555}-\frac{77774}{77777}=1-\frac{3}{55555}-1+\frac{3}{7777777}=$

$=-3\left(\frac{1}{55555}-\frac{1}{77777}\right)<0,$

(na podstawie własności: *z dwóch ułamków o jednakowych licznikach ten jest większy, którego mianownik jest mniejszy*).

Iloczyn liczby dodatniej i ujemnej jest ujemny, zatem $a-b<0\Rightarrow a<b$.

7. Wykaż, że liczba $10^n+10^{n+1}+10^{n+2}$ jest liczbą podzielną przez 3.

D: $10^n+10^{n+1}+10^{n+2}=10^n(1+10+100)=10^n\cdot 111=3\cdot\underbrace{37\cdot 10^n}_{k\in N}=3k$

8. Uzasadnij, że suma cyfr liczby $10^{91}-91$ jest równa 810.

D: $10^{91}-91=\underbrace{100\cdots 000}_{91\ zer}-91=\underbrace{99\ldots 909}_{90\ dziewiątek}$.

Zatem $S=90\cdot 9=810$, gdzie S jest sumą cyfr liczby $10^{91}-91$.

9. Wykaż, że $3^{500}>5^{300}$.

D: Niech $a=3^{500}$ i $b=5^{300}$, to $a>0$ i $b>0$, to $a>b\Leftrightarrow a-b>0$ lub $\frac{a}{b}>1$.

Zatem $\frac{3^{500}}{5^{300}}=\frac{(3^5)^{100}}{(5^3)^{100}}=(\frac{243}{125})^{100}>1\Rightarrow a>b$.

10. Wykaż, że liczby $11^{\log_7 10}$ i $10^{\log_7 11}$ są równe.

D: $11^{\log_7 10} = \underbrace{\left(11^{\log_{11} 10}\right)^{\frac{1}{\log_{11} 7}}}_{zamiana\ podstawy\ logarytmu} = \underbrace{10^{\frac{1}{\log_{11} 7}}}_{z\ własności\ a^{\log_a b}=b} = 10^{\log_7 11}$

11. Uzasadnij, że liczba $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{98\cdot 100} = \frac{49}{200}$.

D: $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{98\cdot 100} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{96} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) = \frac{49}{200}$.

12. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 16 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest równa 8.

Z: $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, gdzie $n \in N$ – kolejne liczby parzyste

D: $(2n)^2 + (2n+2)^2 + (2n+4)^2 + (2n+6)^2 = 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 + 4n^2 + 16n + 16 +$
$4n^2 + +24n + 36 = 16n^2 + 48n + 56 = 16\underbrace{(n^2 + 3n + 3)}_{k \in N} + 8 = 16k + 8$.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. Wykaż, że wyrażenie $\sqrt{4x^2+12x+9}+2\sqrt{x^2+12x+36}$ ma stałą wartość dla $x \in (-1; 5)$.

D: $\sqrt{4x^2+12x+9}+2\sqrt{x^2+12x+36} = |2x+3|+2|x-6| = 2x+3-2x+12 = 15$

2. Wykaż, że jeżeli $a+b=4$, $a \in R$ i $b \in R$, to $a^2+b^2 \geq 8$.

Z: $a+b=4$ i $a \in R$ i $b \in R$

D: $b = 4-a \Rightarrow a^2+b^2 = a^2+(4-a)^2 = a^2+16-8a+a^2 = 2a^2-8a+16 =$
$= 2(a^2-4a+4)+8 = 2(a-2)^2+8 \geq 8$.
Dla każdego $a \in R$ wyrażenie $2(a-2)^2 \geq 0$, z tego wynika, że $a^2+b^2 \geq 8$.

3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x, y, z zachodzi nierówność $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.

D: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$
$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$
$x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+x^2-2xz+z^2 \geq 0$
$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$
Suma kwadratów trzech liczb jest nieujemna dla $x, y, z \in R$. Równość zachodzi dla $x=y=z$.

4. Wykaż, że jeżeli $xy > 0$, to $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) \geq 4$.

D: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x} = 2+\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geq 2} \geq 4$.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

D: Jeżeli podniesiemy powyższą nierówność obustronnie do kwadratu to otrzymamy

$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab$$

$4a^2b^2 \leq ab(a^2 + 2ab + b^2)$

$0 \leq a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 - 4a^2b^2$

$0 \leq a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$

$0 \leq ab(a^2 - 2ab + b^2)$

$0 \leq ab(a-b)^2$ – nierówność tożsamościowa dla $a, b \in R$

6. Wykaż, że jeżeli $x + y + z = 0$, to $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Z: $x + y + z = 0$

D: Z założenia $z = -x - y$, wobec tego

$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = -3xy(x+y) = 3xyz$.

7. Wykaż, ze jeżeli $yz \neq 0$ i $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, to $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{x^2}{y^2}$.

Z: $yz \neq 0$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$

D: Z założenia $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ wynika, że $y^2 = xz \Rightarrow y^4 = x^2z^2$. Dodając do obu stron równania wyrażenie x^2y^2 otrzymujemy $x^2y^2 + y^4 = x^2z^2 + x^2y^2$, czyli $y^2(x^2 + y^2) = x^2(y^2 + z^2)$, a zatem $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{x^2}{y^2}$.

8. Udowodnij, że jeżeli liczba $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to liczba $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jest też liczbą całkowitą.

Z: $x + \frac{1}{x} \in C$

D: Z założenia $x + \frac{1}{x} \in C$, z czego wynika, że wyrażenie $(x + \frac{1}{x})^3 \in C$.

$(x+\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + \underbrace{3(x+\frac{1}{x})}_{\in C}$, zatem

$x^3 + \frac{1}{x^3}$

jest liczbą całkowitą.

9. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych różnych od zera zachodzi nierówność $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$.

D: Zauważmy, że $a^2 + ab + b^2 = (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$. Ponieważ $a \neq 0$ i $b \neq 0$, więc $(a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$, czyli $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Pomnóżmy nierówność $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$ obustronnie przez $3(a^2 + ab + b^2)$, wówczas otrzymamy
$3a^2 - 3ab + 3b^2 \geq a^2 + ab + b^2$, co po zredukowaniu wyrazów podobnych daje nam $2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0$, a po dalszych przekształceniach $(a-b)^2 \geq 0$ – nierówność tożsamościowa dla $a, b \in R\backslash\{0\}$.

10. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z, k prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(x+z)(y+k)} \geq \sqrt{xy} + \sqrt{zk}$.

D: Podnieśmy daną nierówność obustronnie do kwadratu, wówczas otrzymamy:

$(x+z)(y+k) \geq \left(\sqrt{xy} + \sqrt{zk}\right)^2$

$xy + xk + zy + zk \geq xy + 2\sqrt{xyzk} + zk$

$xk + zy - 2\sqrt{xyzk} \geq 0$

$(\sqrt{xk} - \sqrt{zy})^2 \geq 0$ – nierówność tożsamościowa dla $x, y, z, k \in R_+$.

11. Udowodnij, że jeśli dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z spełniony jest warunek $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{3}$, to $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \leq 1$.

D: Zauważmy, że $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, a także z 2. nierówności $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, zatem $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ac)$.

Podstawiając za $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$ i korzystając z warunku $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{3}$ otrzymujemy

$3 \geq 3(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) \Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \leq 1.$

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b, takich, że $a^2 + b^2 = 4$ zachodzi nierówność $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$.

D: Zauważmy, że $ab = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2} = \frac{(a+b)^2-4}{2} = \frac{(a+b-2)(a+b+2)}{2}$.

Wobec tego $\frac{ab}{a+b+2} = \frac{(a+b-2)(a+b+2)}{2(a+b+2)} = \frac{a+b-2}{2} = \frac{a+b}{2} - 1$.

Aby udowodnić nierówność $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$ należy dowieść, że $a + b \leq 2\sqrt{2}$.

Wiemy, że $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab$, a także $ab = \sqrt{a^2b^2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} = 2$, stąd

$(a + b)^2 \leq 4 + 4 = 8 \Rightarrow a + b \leq 2\sqrt{2}$.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

1. Uzasadnij, że równanie $|9-x|=\frac{20}{x}$ ma trzy pierwiastki, w tym jeden, który jest liczbą niewymierną.

D: Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, zatem rozpatrzmy dwa przypadki:

$1°$ Gdy $x \in (0;9>$ równanie przyjmuje postać $9-x=\frac{20}{x}$.

Mnożąc obie strony równania przez x,otrzymamy $x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-5)=0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=5$. Obie liczby należą do przedziału $(0;9>$.

$2°$ Gdy $x>9$ równanie przyjmuje postać $9-x=-\frac{20}{x}$.

Mnożąc obie strony równania przez x,otrzymamy $x^2-9x-20=0 \Leftrightarrow x=\frac{9-\sqrt{161}}{2} \notin D \vee$ $x=\frac{9+\sqrt{161}}{2} \in NW$.

2. Uzasadnij, że istnieje tylko jedna liczba całkowita spełniająca równanie $\frac{|x|}{x}(x+1)=1$.

D: Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Rozpatrzmy dwa przypadki:

$1°$ Gdy $x>0$ to równanie przyjmuje postać $x+1=1$, to $x=0 \notin D$.

$2°$ Gdy $x<0$ to równanie przyjmuje postać $x+1=-1$, to $x=-2 \in D$.

3. Wykaż, że istnieje jedna liczba naturalna spełniająca równanie $x^2+x^3+x^4=3$.

D: $x^2+x^3+x^4=3 \Leftrightarrow x^2(1+x+x^2)=3$.

$$\bigwedge_{x\in N\setminus\{0,1\}} 1+x+x^2>3 \ \wedge \bigwedge_{x\in N\setminus\{0,1\}} x^2>3,$$

zatem jedyną liczbą naturalną spełniającą to równanie jest liczba 1.

4. Uzasadnij, że równanie $|x-|x|-2| = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$.

D: Rozwiążmy równanie graficznie.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$y = \begin{cases} |x-x-2| = 2 & dla\ x \geq 0 \\ |2x-2| = 2|x-1| & dla\ x < 0 \end{cases}$$

Sporządźmy wykres funkcji $y = |x-|x|-2|$.

Prosta $y = 2$ ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z wykresem funkcji $y = |x-|x|-2|$, zatem należy stwierdzić, że równanie $|x-|x|-2| = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$.

5. Wykaż, że równanie $\sqrt{x^2-6x+9} - |x+2| = k$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $k \in \{-5; 5\}$.

D: Niech $y = \sqrt{x^2-6x+9} - |x+2| = \sqrt{(x-3)^2} - |x+2| = |x-3| - |x+2|$.

Narysujmy wykres $y = |x-3| - |x+2|$. Rozpatrzmy trzy przypadki. Po przekształceniach otrzymamy:

$$y = f(x) = \begin{cases} 5 & dla\ x \leq -2 \\ 2x-5 & dla\ x \in (-2; 3) \\ -5 & dla\ x \geq 3 \end{cases}$$

Proste o równaniach $y = 5$ i $y = -5$ mają nieskończenie wiele punktów wspólnych z wykresem funkcji $f(x)$, zatem możemy stwierdzić, że równanie $\sqrt{x^2-6x+9} - |x+2| = k$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $k \in \{-5; 5\}$.

6. Uzasadnij, że równanie $\big||2x+5|-4\big| = 3$ ma cztery różne rozwiązania.

D: Korzystając z własności wartości bezwzględnych otrzymujemy:

$|2x+5|-4 = 3 \quad \vee \quad |2x+5|-4 = -3$

$|2x+5| = 7 \quad \vee \quad |2x+5| = 1$

$2x+5 = 7 \ \vee \ 2x+5 = -7 \quad \vee \quad 2x+5 = 1 \ \vee \ 2x+5 = -1$

$x = 1 \ \vee \ x = -6 \quad \vee \quad x = -2 \ \vee \ x = -3$

$Z = \{-6, -3, -2, 1\}$

7. Uzasadnij, że jeżeli $m > 0$, to dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^3 + mx^2 + m(m+1)x - (m+1)^2 = 0$.

D: Zauważmy, że $x = 1$ jest pierwiastkiem równania $W(x) = x^3 + mx^2 + m(m+1)x - (m+1)^2 = 0$, bo $W(1) = 1 + m + m^2 + m - m^2 - 2m - 1 = 0$.

Po przekształceniu równania otrzymujemy $(x-1)(x^2 + (m+1)x + (m+1)^2) = 0$.

Równanie to ma rozwiązanie dla $x = 1 \quad \vee \quad x^2 + (m+1)x + (m+1)^2 = 0$.

$\Delta = (m+1)^2 - 4(m+1)^2 = -3(m+1)^2$, z założenia $m > 0$, więc $\Delta < 0$, zatem równanie $x^2 + (m+1)x + (m+1)^2 = 0$ nie ma rozwiązań. Jedynym rozwiązaniem równania $x^3 + mx^2 + m(m+1)x - (m+1)^2 = 0$ jest $x = 1$.

8. Uzasadnij, że równanie $(m-2)x^4 - 2(m+3)x^2 + m - 1 = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste dla $m \in (2;\ \infty)$.

D: Wprowadźmy zmienną pomocniczą $t = x^2 \ \wedge \ t \geq 0$.

Mamy $W(t) = (m-2)t^2 - 2(m+3)t + m - 1$. Równanie $W(x) = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste, gdy spełnione są warunki: $\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$

Mamy: $\Delta = 4(m+3)^2 - 4(m-2)(m-1) = 36m + 28$.

1° $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{6}$

2° $t_1 t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m-2} > 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (2;\ \infty)$

3° $t_1 + t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(m+3)}{m-2} > 0 \Leftrightarrow 2(m+3)(m-2) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3)$

Uwzględniając wszystkie warunki

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ m > -\frac{7}{6} \\ m \in (-\infty; 1) \cup (2;\ \infty) \\ m \in (-\infty; -3) \end{cases}$$

otrzymujemy, że równanie $W(x) = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste da $m > 2$.

9. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| < 2$ jest liczba 2.

D: Korzystając z własności wartości bezwzględnej:

$$\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{2x-3}{x-1} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-1} < 2 \\ \dfrac{2x-3}{x-1} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3-2x+2}{x-1} < 0 \\ \dfrac{2x-3+2x-2}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-1) < 0 \\ (4x-5)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{4}; \infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in (\tfrac{5}{4}; \infty).$$

Zatem najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest liczba 2.

10. Uzasadnij, że równanie $x^3 + mx + k = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste takie, że $x_1 = x_2 = x_3 - 3$ wtedy, gdy $m = -3$ i $k = -2$.

D: Równanie $x^3 + mx + k = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste spełniające warunek taki, że $x_1 = x_2 = x_3 - 3$ wtedy, gdy $(x - x_1)(x - x_1)\big(x - (x_1 + 3)\big) = 0$. Po przekształceniu równania mamy $x^3 - 3x^2(x_1 + 1) + 3xx_1(x_1 + 2) - 3{x_1}^2 - {x_1}^3 = 0$.

Równania $x^3 + mx + k = 0$ i $x^3 - 3x^2(x_1 + 1) + 3xx_1(x_1 + 2) - 3{x_1}^2 - {x_1}^3 = 0$ są w równowadze, gdy $x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$, wówczas otrzymujemy $x^3 - 3x - 2 = 0$, zatem $m = 3$ i $k = -2$.

11. Wykaż, że liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

D: Liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)^2$ i nie jest podzielny prze dwumian $(x-2)^3$.

Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci $W(x) = (x-2)^2(x+5)^2$, wobec tego $x = 2$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

12. Dane są dwie funkcje $f(x) = x^2 + mx + 1$ i $g(x) = x^2 + x + m$. Uzasadnij, że funkcje mają wspólne miejsce zerowe dla $m = -2$.

D: $f(x) = 0 \ \wedge \ g(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ x^2 + mx + 1 = x^2 + x + m \ \Leftrightarrow \ mx - x + 1 - m = 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x(m-1) - (m-1) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(m-1) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1,$ dla $m \in R\backslash\{1\}$.

Dla $m = 2$ funkcja $f(x) = (x-1)^2 \ \wedge \ \ g(x) = (x-1)(x+2)$.

$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1, g(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(x+2) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \{1, -2\}$.

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają jedno wspólne miejsce zerowe $x = 1$ dla $m = 2$.

13. Uzasadnij, że równanie $x^2 - (k-1)x + 2k - 5 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest mniejsze od -1, a drugie jest dodatnie dla $k \in (-\infty; \frac{5}{3})$.

D: Aby równanie miało dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest mniejsze od -1, a drugie jest dodatnie spełnione muszą być warunki: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$ gdzie $f(x) = x^2 - (k-1)x + 2k - 5$.

$1^\circ \ \ \Delta > 0 \ \Leftrightarrow \ k^2 - 10k + 21 > 0 \ \Leftrightarrow \ (k-3)(k-7) > 0 \ \Leftrightarrow \ k \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$

$2^\circ \ \ f(-1) < 0 \ \Leftrightarrow \ 1 + k - 1 + 2k - 5 < 0 \ \Leftrightarrow \ k < \dfrac{5}{3}$

$3^\circ \ \ f(0) < 0 \ \Leftrightarrow \ 2k - 5 < 0 \ \Leftrightarrow \ k < \dfrac{5}{2}$

Uwzględniając trzy warunki możemy zapisać, ze równanie $x^2 - (k-1)x + 2k - 5 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste spełniające powyższe kryteria dla $k \in (-\infty; \frac{5}{2})$.

14. Uzasadnij, że suma współczynników wielomianu $W(x) = 5(x^2 - 4x + 4)^{2016} - 4(x^3 + 2x^2 - 4)^{2015}$ jest równa 9.

D: Suma współczynników wielomianu $W(x) = W(1)$.

$W(1) = 5(1 - 4 + 4)^{2016} - 4(1 + 2 - 4)^{2015} = 5 + 4 = 9$

FUNKCJE

1. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 2kx + 4k + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $(1;\ \infty)$ dla $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

D: Zauważmy, że dla $k \in (-1; 1)$ ramiona paraboli będącej wykresem tej funkcji skierowane są w dół. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $(1;\ \infty)$ wtedy gdy

$x_w = p = 1 \Leftrightarrow x_w = \dfrac{2k}{2(k^2 - 1)} = 1 \Leftrightarrow k^2 - k - 1 = 0 \ \wedge$ dla $k \in (-1; 1)$.

Wówczas $\left(k - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin D$. Zatem dla $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ funkcja kwadratowa $f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 2kx + 4k + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w

przedziale $(1;\ \infty)$.

2. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1) + 2$. Wykaż, że istnieje taka wartość parametru m, dla którego dana funkcja przyjmowałaby wartości ujemne.

D: $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1) + 2 = (m^2 - 1)x^2 + 2m - 2 + 2 = (m^2 - 1)x^2 + 2m$

Rozważmy cztery przypadki:

1° $m = 1 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie – nie spełnia warunków zadania

2° $m = -1 \Rightarrow f(x) = -2 \Rightarrow$ funkcja przyjmuje wartości ujemne

3° $m = 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 \Rightarrow$ funkcja przyjmuje wartości ujemne

4° $m \in R \backslash \{-1, 0, 1\}$, to czy funkcja będzie przyjmowała wartości ujemne zależy od znaku Δ

$\Delta = -4(m^2 - 1) \cdot 2m = -8m(m - 1)(m + 1)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;\ -1) \cup (0; 1) \Rightarrow$ funkcja będzie przyjmowała wartości ujemne

3. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$. Wykaż, że $W(2-\sqrt{5})$ jest liczbą całkowitą.

D: $W\left(2-\sqrt{5}\right) = \left(2-\sqrt{5}\right)^3 - 5\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 3\left(2-\sqrt{5}\right) - 15 =$

$= 8 - 12\sqrt{5} + 30 - 5\sqrt{5} - 20 + 20\sqrt{5} - 25 + 6 - 3\sqrt{5} - 15 = -16 \in C$

4. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $\vec{u} = [-5, 2]$, a następnie przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali $k = -2$, tzn. wykres funkcji $y = h(x)$ otrzymano z wykresu $y = -2g(x)$. Udowodnij, że funkcja h określa się wzorem $h(x) = \frac{-4x-28}{x+5}$.

D: $f(x) = \frac{4}{x} \xrightarrow{[-5,2]} g(x) = \frac{4}{x+5} + 2 \xrightarrow{-2g(x)} h(x) = \frac{-8}{x+5} - 4 = \frac{-8-4x-20}{x+5} = \frac{-4x-28}{x+5}$

W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $P = (x; y)$ w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k $(k \neq 0)$ jest punkt $P_1 = (x; ky)$.

5. Uzasadnij, ze zbiorem wartości funkcji $f(x) = 5^{\log_5(-2x^2+5x+6)}$ jest zbiór $(0; 12\frac{1}{4} >$.

D: Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-1; 6)$; $-x^2 + 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-6) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 6)$

Korzystając z własności logarytmu $a^{\log_a b} = b$, gdy $a > 0 \ \wedge a \neq 0 \ \wedge b > 0$, otrzymujemy $f(x) = -x^2 + 5x + 6 \ \wedge x \in (-1; 6)$.

Należy wyznaczyć zbiór wartości funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ w przedziale $(-1; 6)$. Funkcja osiąga wartość największą dla $x_w = \frac{5}{2} \in (-1; 6)$ i wynosi $12\frac{1}{4}$.

$f(-1) = 0,\ f(6) = 0$, a zatem $ZW_f = (0; 12\frac{1}{4} >$.

6. Punkt $A = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$ należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Uzasadnij, że równanie $|f(x-1) - 3| = m$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie dla $m \in (0; 2\frac{2}{3})$.

D: $A = \left(-1; \frac{1}{3}\right) \in W_f \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{3} = a^{-1} \ \wedge \ a > 0 \ \Rightarrow \ a = 3,$ zatem $f(x) = 3^x$.

Równanie $|f(x-1) - 3| = m$ rozwiążmy graficznie. Niech $y = |f(x-1) - 3| = |3^{x-1} -$

$3|$.

$f(0) = |3^{-1} - 3| = \left|\frac{1}{3} - 3\right| = \left|-2\frac{2}{3}\right| = 2\frac{2}{3}$

Proste o równaniach $y = m$ mają dwa punkty wspólne z wykresem funkcji $y = f(x)$ wtedy, gdy $m \in (0; 2\frac{2}{3})$, zatem równanie $|f(x-1) - 3| = m$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie dla $m \in (0; 2\frac{2}{3})$.

7. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $f(8-x) \leq f(2x)$ jest liczba 2.

D: Wyznaczmy:

$f(8-x) = \frac{1}{8-x-1} - 2 = \frac{1}{7-x} - 2,$

$f(2x) = \frac{1}{2x-1} - 2,$

$$f(8-x) \leq f(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{7-x} - 2 \leq \frac{1}{2x-1} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{7-x} \leq \frac{1}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2x-1-7+x}{(7-x)(2x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-8}{(7-x)(2x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow (3x-8)(7-x)(2x-1) \leq 0 \wedge x \neq 7 \wedge x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (\tfrac{1}{2}; \tfrac{8}{3} > \cup (7; \infty).$$

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność jest liczba 2.

CIĄGI

1. Uzasadnij, że suma wszystkich liczb naturalnych nieparzystych czterocyfrowych mniejszych od 5000 jest równa 6000000.

D: Liczb naturalnych nieparzystych czterocyfrowych mniejszych od 5000 jest 2000, najmniejszą z nich jest 1001, a największą 4999. Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $r = 2$. Skorzystajmy ze wzoru na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, zatem $S_{2000} = \frac{(1001+4999)\cdot 2000}{2} = 6000000$.

2. Udowodnij, że jeżeli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i czwartego, to wyraz szósty jest średnią geometryczną wyrazu czwartego i dziewiątego.

Z: (a_n) jest ciągiem arytmetycznym takim, że $a_2{}^2 = a_1a_4$

D: (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r i $a_2{}^2 = a_1a_4$, to $(a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 3r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1{}^2 + 2a_1r + r^2 = a_1{}^2 + 3a_1r \Leftrightarrow r^2 = a_1r$.

Mamy wykazać, że $a_6{}^2 = a_4a_9$

$$a_6{}^2 = a_4a_9 \Leftrightarrow (a_1 + 5r)^2 = (a_1 + 3r)(a_1 + 8r) \Leftrightarrow a_1{}^2 + 10a_1r + 25r^2$$

$$= a_1{}^2 + 11a_1r + 24r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = a_1r$$

Równość jest prawdziwa, gdyż z założenia $(a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 3r)$.

3. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.

D: $a_k = a_{k+1} - a_{k-1} \ \wedge \ 1 < k < n \ \wedge \ k, n \in N$

Korzystając z definicji ciągu geometrycznego mamy:

$$P = a_{k+1} - a_{k-1} = a_k q - \frac{a_k}{q} = a_k\left(q - \frac{1}{q}\right) = a_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$= a_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}\right) =$$

$$= a_k\left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right) = a_k = L$$

4. Wykaż, że jeżeli S_n, S_{2n}, S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę $n, 2n$ i $3n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) to $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

D: q- iloraz ciągu geometrycznego (a_n)

Korzystając ze wzoru na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego rozpatrzmy dwa przypadki:

1° Gdy $q = 1$, to $L =$ to $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = na_1(3na_1 - 2na_1) = n^2{a_1}^2 = (na_1)^2$.

$P = (S_{2n} - S_n)^2 = (2na_1 - na_1)^2 = (na_1)^2$. $L = P$, zatem równość jest prawdziwa.

2° Gdy $q \neq 1$, to

$L = S_n(S_{3n} - S_{2n}) = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\left[\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}\right] = \frac{a_1(1-q^n)\cdot a_1(1-q^{3n}-1+q^{2n})}{(1-q)^2} =$

$= \frac{{a_1}^2(1-q^n)q^{2n}(1-q^n)}{(1-q)^2} = \frac{{a_1}^2(1-q^n)^2 q^{2n}}{(1-q)^2}$.

$P = (S_{2n} - S_n)^2 = \left(\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\right)^2 = \frac{{a_1}^2(1-q^{2n}-1+q^n)^2}{(1-q)^2} = \frac{{a_1}^2(1-q^n)^2 q^{2n}}{(1-q)^2}$. $L = P$, zatem równość jest prawdziwa.

5. Wykaż, że jeżeli ciąg (ab, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(b, c, 2b - a)$ jest ciągiem geometrycznym.

D: Z założenia i z własności ciągu arytmetycznego wynika, że $2b^2 = ab + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2b^2 - ab$. Należy wykazać, że $(b, c, 2b - a)$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego $\Leftrightarrow c^2 = 2b^2 - ab$. Zatem nierówność jest prawdziwa.

6. Trzy różne liczby rzeczywiste różne od zera tworzą ciąg arytmetyczny, a kwadraty tych liczb zapisane w tym samym porządku tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, ze iloraz q tego ciągu jest równy $q = (\sqrt{2} - 1)^2$ lub $q = (\sqrt{2} + 1)^2$.

Z: $(x, x+r, x+2r)$ - kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego i $x \neq 0 \ \wedge \ x+r \neq 0 \ \wedge$
$x + 2r \neq 0$

$(x^2, (x+r)^2, (x+2r)^2)$ – kolejne wyrazy ciągu geometrycznego

D: Z własności ciągu geometrycznego mamy $q = \frac{(x+r)^2}{x^2} = (1+\frac{x}{r})^2$.

Korzystając z definicji ciągu geometrycznego otrzymujemy $\frac{(x+r)^2}{x^2} = \frac{(x+2r)^2}{(x+r)^2}$, po przekształceniu $r = 0$ lub $(\frac{r}{x})^2 + 4\left(\frac{r}{x}\right) + 2 = 0$, wobec tego $q = 1$ lub $\frac{r}{x} = -2+\sqrt{2} \ \vee$
$r = -2-\sqrt{2}$, zatem $q = (\sqrt{2}-1)^2$ lub $q = (\sqrt{2+1})^2$.

7. Uzasadnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = a_{n+1} + a_n$ też jest ciągiem geometrycznym.

D: Z założenia (a_n) jest ciągiem geometrycznym, więc $a_{n+1} = a_n q$. Wobec tego $b_n = a_{n+1} + a_n = a_n q + a_n = a_n \underbrace{(q+1)}_{q'} = a_n q'$, zatem (b_n) jest ciągiem geometrycznym.

8. Uzasadnij, że $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3-1}{n^3+2} - \frac{3n^2+1}{n^2+4}) = -2$.

D: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3-1}{n^3+2} - \frac{3n^2+1}{n^2+n}) = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{n^3(1-\frac{1}{n^3})}{n^3(1-\frac{2}{n^3})} - \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{n^2(3-\frac{1}{n^2})}{n^2(1-\frac{4}{n^2})} = 1 - 3 = -2$

9. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x+3} + \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2} + \frac{(x+1)^3}{(x+3)^3} + \cdots$

Uzasadnij, że zbiór wartości tej funkcji $ZW = (-\frac{1}{2}; \infty)$.

D: Zauważmy, że po prawej stronie mamy sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = \frac{x+1}{x+3}$ i $x \neq -3$ oraz $q = \frac{x+1}{x+3}$. Suma ta istnieje, jeżeli $\left|\frac{x+1}{x+3}\right| < 1$ i wynosi $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Zbadajmy warunek: $-1 < \frac{x+1}{x+3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+3} < 1 \\ \frac{x+1}{x+3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in$

$(-2; \infty)$

$S = \frac{\frac{x+1}{x+3}}{1-\frac{x+1}{x+3}} = \frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{2}{x+3}} = \frac{x+1}{2} \ \wedge \ x \in (-2; \infty)$, zatem $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ \wedge \ x \in (-2; \infty)$.

Funkcja f jest funkcją liniową rosnącą w dziedzinie. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) =$

$= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Wobec tego $ZW_f = (-\frac{1}{2};\ \infty)$.

10. Suma trzech pierwszych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 21, zaś suma trzech następnych wyrazów jest równa $\frac{21}{64}$. Uzasadnij, że suma wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $21\frac{1}{3}$.

D: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$ - suma nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $q \neq 0$ oraz $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ a_4 + a_5 + a_6 = \frac{21}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + q + q^2) = 21 \\ a_1 q^3 (1 + q + q^2) = \frac{21}{64} \end{cases}$.

Po przekształceniu otrzymamy $q^3 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow q = \frac{1}{4} \ \wedge \ a_1 = 16$.

Sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego obliczamy ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$, zatem $S = \frac{16}{1-\frac{1}{4}} = 21\frac{1}{3}$.

11. Uzasadnij, że istnieje jedna liczba naturalna spełniająca równanie

$$x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \cdots = 1.$$

D: Lewa strona równania jest sumą dwóch szeregów geometrycznych: $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \cdots$ oraz $-\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{8x} + \cdots\right)$.

W szeregu geometrycznym : $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \cdots$ pierwszy wyraz $a_1 = x$, $q = \frac{x}{2}$. Szereg geometryczny

jest zbieżny i jego suma wynosi $S = \frac{a_1}{1-q}$, jeżeli $|q| < 1$.

$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$, zatem $S = \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x} \quad \wedge \quad x \in (-2; 2)$.

W szeregu geometrycznym $-\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{8x} + \cdots\right)$, $a_1 = \frac{1}{2x}$, $q = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$, zatem

$S = \frac{\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{2}} = -x$.

Równanie przyjmuje postać $\frac{2x}{2-x} - x = 1 \quad \wedge \quad x \in (-2; 2)$.

Po przekształceniu otrzymujemy $x^2 + x - 2 = 0$, więc $x_1 = -2 \notin D$ i $x_2 = 1 \in N$.

TRYGONOMETRIA

1. Wykaż, że $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$.

D: $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ =$

$= \sin(90^\circ - 3^\circ) - \sin(60^\circ - 1^\circ) - \sin(90^\circ + 3^\circ) + \sin(60^\circ + 1^\circ) =$

$= \cos 3^\circ - \cos 3^\circ + \sin 60^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 60^\circ =$

$= \frac{1}{2}\sin 1^\circ + \frac{1}{2}\sin 1^\circ = \sin 1^\circ$

2. Wykaż, że jeżeli $\sin x - \cos x = a$, to $\frac{\sin(10x)+\sin(4x)-\sin(6x)}{1+\cos(2x)-2\sin^2(4x)} = 2 - 2a^2$.

D: Zauważmy, że $1 - 2\sin^2(4x) = \cos(8x)$. Korzystając z sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych oraz sinusa podwojonego kąta otrzymamy:

$$\frac{[\sin(10x) + \sin(4x)] - \sin(6x)}{\cos(8x) + \cos(2x)} = \frac{2\sin(7x)\cos(3x) - 2\sin(3x)\cos(3x)}{\cos(8x) + \cos(2x)} =$$

$$= \frac{2\cos(3x)[\sin(7x) - \sin(3x)]}{2\cos(5x)\cos(3x)} = \frac{2\sin(2x)\cos(5x)}{\cos(5x)} = 2\sin(2x) = 4\sin x \cos x$$

Z założenia $\sin x - \cos x = a$, po przekształceniu otrzymujemy:

$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = a^2$

$2\sin x \cos x = 1 - a^2$, zatem

$4\sin x \cos x = 2 - 2a^2$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

3. Wykaż, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x \cdot |\sin x|}$ jest zbiór $\{-2, 2\}$.

D: $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x \cdot |\sin x|} \quad \wedge \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad k \in C$

Przekształćmy wzór funkcji stosując definicje wartości bezwzględnej i wzoru na sumę podwojonego kąta.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x \cos x}{\cos x \sin x} & dla\ \sin x > 0 \ \wedge \ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\sin x \cos x}{-\cos x \sin x} & dla\ \sin x < 0 \ \wedge \ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in C$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & dla\ \sin x > 0 \\ -2 & dla\ \sin x < 0 \end{cases}$$

zatem $ZW_f = \{-2,2\}$.

4. Uzasadnij, że równanie $3\cos x + \cos(2x) = k$ ma rozwiązanie, gdy $k \in < -\frac{17}{8};\ 4 >$.

D: Korzystając ze wzoru na cosinus podwojonego kąta możemy zapisać, że $f(x) = 3\cos x + \cos(2x) = 2\cos^2 x + 3\cos x - 1$.

Wyprowadźmy zmienną pomocniczą $\cos x = t \ \wedge \ t \in < -1; 1 >$, zatem $g(t) = 2t^2 + 3t - 1 \ \wedge$

$\wedge \ t \in < -1; 1 >$.

Funkcja kwadratowa g osiąga wartości najmniejsze dla $t_w = -\frac{3}{4} \in < -1; 1 >$. Zatem $g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{8}$.

Wyznaczmy wartości funkcji na końcach przedziału: $g(-1) = -2$, $g(1) = 4$. Funkcja kwadratowa g w przedziale $t \in < -1; 1 >$ przyjmuje wartości $< -\frac{17}{8}; 4 >$, wobec tego równanie $g(x) = k$ ma rozwiązanie dla $k \in < -\frac{17}{8}; 4 >$.

5. Wiedząc, że $\operatorname{tg} x = 3$, uzasadnij, że $\frac{2\sin(2x) - 3\cos(2x)}{4\sin(2x) + 5\cos(2x)} = -\frac{9}{4}$.

D: Wiedząc, że $\operatorname{tg} x = 3$ i $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \ \wedge \ \cos(2x) \neq 0$ to $\operatorname{tg}(2x) = \frac{6}{1-9} = -\frac{3}{4} \ \wedge$

$\cos(2x) \neq 0$. Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{2\sin(2x) - 3\cos(2x)}{4\sin(2x) + 5\cos(2x)}$ przez $\cos(2x)$

otrzymamy:

$$\frac{2\sin(2x) - 3\cos(2x)}{4\sin(2x) + 5\cos(2x)} = \frac{2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} - 3\frac{\cos(2x)}{\cos(2x)}}{4\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5\frac{\cos(2x)}{\cos(2x)}} = \frac{2\operatorname{tg}(2x) - 3}{4\operatorname{tg}(2x) + 5} = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 3}{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 5} = -\frac{9}{4}.$$

6. Wiedząc, że $\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2$, uzasadnij, że $\cos(2x) = -\frac{5}{13}$.

D: Z założenia $\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2 \ \Leftrightarrow \ 6\sin x + 5\cos x = 8\sin x + 2\cos x \ \Leftrightarrow \ 2\sin x = 3\cos x$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \sin x = \frac{3}{2}\cos x \ \wedge \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, mamy $\frac{13}{4}\cos^2 x = 1 \ \Leftrightarrow \ \cos^2 x = \frac{4}{13}$.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta otrzymamy:

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \frac{4}{13} - 1 = -\frac{5}{13}$.

7. Uzasadnij, że równanie $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$ ma cztery rozwiązania w przedziale $< -3; 3 >$.

D: $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \iff 4\sin^2 x\,(\sin x - 2) - (\sin x - 2) = 0 \iff$

$\iff (\sin x - 2)(4\sin^2 x - 1) = 0 \iff (\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$

$\iff \left(\underbrace{\sin x = 2}_{równ.sprzeczne} \lor \sin x = \frac{1}{2} \lor \sin x = -\frac{1}{2}\right) \iff \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \lor\right.$

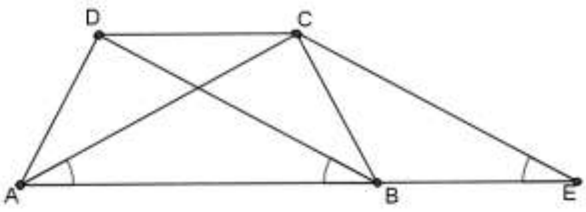
$\left. x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \land x \in < -3; 3 > \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \lor x = \frac{5\pi}{6} \lor$

$x = -\frac{\pi}{6} \lor x = -\frac{5\pi}{6}$

PLANIMETRIA

1. Wykaż, że trapez nie będący równoległobokiem jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy ma równe przekątne.

Dowód należy poprowadzić w obie strony $[\left(p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p\right) \Leftrightarrow \ p \Leftrightarrow q]$:



1° *Jeżeli $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, to przekątne AC i BD są równej długości.*

D: Z założenia $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, w którym $AB||CD$ i $|AD| = |BC|$. W trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe, z czego wynika, że trójkąty ABC i ABD są przystające na podstawie cechy bkb, a co za tym idzie $|AC| = |BD|$.

2° *Jeżeli przekątne AC i BD w trapezie $ABCD$ są równe, to trapez jest równoramienny.*

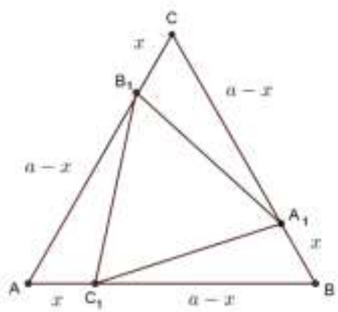
D: Przesuńmy przekątną BD o wektor $\overrightarrow{DC}$ (lub narysujmy prostą równoległą do BD przechodzącą przez punkt C), w wyniku czego otrzymamy równoległobok $BECD$, w którym odpowiednie kąty są równe. Z założenia $|AC| = |BD|$, więc po przekształceniu $|CE| = |BD| = |AC|$, zatem $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle AEC|$, ale $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle BAC|$ i $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ABD|$, a więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABD|$. Stąd i z równości $|AC| = |BD|$ wynika, że trójkąty ABC i ABD są przystające, wobec tego $|BC| = |AD|$, a zatem trapez $ABCD$ jest równoramienny.

2. W równobocznym trójkącie ABC wybrano na bokach BC, AC, AB odpowiednio punkty A_1, B_1, C_1 tak, że $BA_1 = CB_1 = AC_1$. Wykaż, że $\Delta A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

D: Z założenia ΔABC jest równoboczny, zatem

$|AB| = |AC| = |BC| = a,\ |BA_1| = |CB_1| = |AC_1| = x$,

$|BC_1| = |A_1C| = |B_1A| = a - x$, gdzie $a > x > 0$.



Wiemy, że $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| = |\sphericalangle C| = 60°$. Na podstawie cechy bkb wynika, że ΔC_1BA_1, ΔA_1CB_1 i ΔB_1AC_1 są przystające. Wobec tego $|A_1C_1| = |A_1B_1| = |B_1C_1|$, a zatem $\Delta A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

3. Wykaż, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest także dwusieczną kąta między środkową i wysokością tego trójkąta poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego.

Z: ΔABC - trójkąt prostokątny

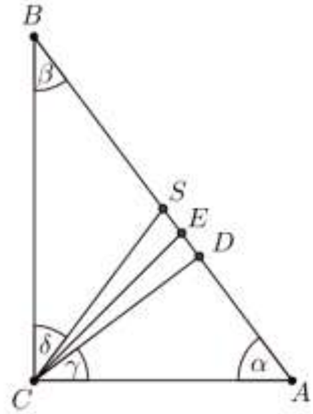
CD – wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka kąta prostego

CS – środkowa trójkąta poprowadzona z wierzchołka kąta prostego

CE – odcinek zawarty w dwusiecznej kąta prostego

$|\sphericalangle ACD| = \gamma$

$|\sphericalangle BCS| = \delta$



D: Zauważmy, że $|\sphericalangle DCE| = 45° - \gamma$ oraz $|\sphericalangle ECS| = 45° - \delta$. Aby udowodnić, że $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ECS|$ należy pokazać, że $\gamma = \delta$.

Z warunku, że CS jest środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego wynika, że $|BS| = |CS|$, zatem $\triangle BSC$ jest równoramienny, stąd $\beta = \delta$.

$\triangle ADC$ jest trójkątem prostokątnym, w którym $\gamma = 90° - \alpha$. W $\triangle ABC$ $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta$, stąd $\gamma = 90° - 90° + \beta = \beta$, wobec tego $\gamma = \delta = \beta$.

4. Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od obwodu i większa od $\frac{3}{4}$ obwodu tego trójkąta.

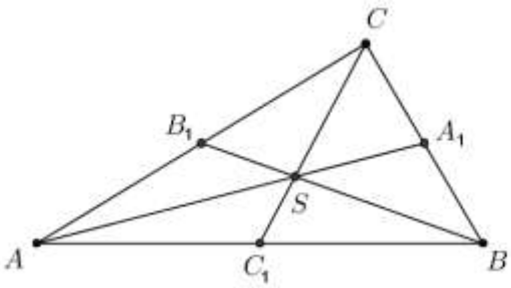
Z: A_1, B_1, C_1 – środki odcinków BC, AC, AB

$|AB| = c$

$|BC| = a$

$|AC| = b$

S – punkt przecięcia się środkowych $\triangle ABC$



D: Z nierówności trójkąta i własności środkowych wynika, że $\frac{2}{3}|BB_1| + \frac{2}{3}|CC_1| > a \Rightarrow$

$\Rightarrow |CC_1| + |BB_1| > \frac{3}{2}a$, analogicznie $|CC_1| + |AA_1| > \frac{3}{2}b$ oraz $|AA_1| + |BB_1| > \frac{3}{2}c$.

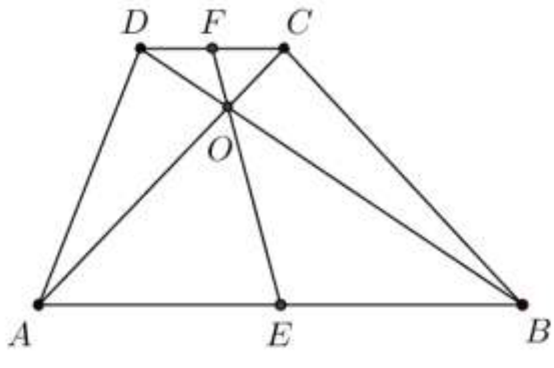
Dodając te nierówności stronami otrzymujemy: $2|AA_1| + 2|BB_1| + 2|CC_1| > \frac{3}{2}(a + b + c)$, co przy podzieleniu przez 2 daje nam $|AA_1| + |BB_1|2|CC_1| > \frac{3}{4}(a + b + c)$.

Korzystając z własności wektorów mamy:

$\begin{cases} \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} \\ \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} \end{cases} \Rightarrow\ 2\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1}}_{=\vec{0}} \Rightarrow\ 2\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, wobec tego $|AA_1| < \frac{|AC|+|AB|}{2} = \frac{b+c}{2}$. Analogicznie $|BB_1| < \frac{a+c}{2}$ oraz $|CC_1| < \frac{a+b}{2}$, co po dodaniu stronami daje nam

$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| < \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2}\ \Rightarrow\ |AA_1| + |BB_1| + |CC_1| < a + b + c$.

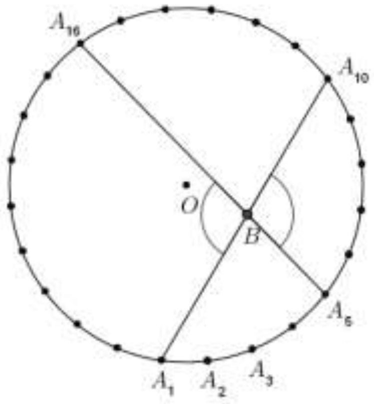
5. Wykaż, że środki podstaw trapezu i punkt przecięcia się jego przekątnych są punktami współliniowymi.



Z: O – punkt przecięcia się przekątnych trapezu
E – środek odcinka AB
F – punkt przecięcia się prostej EO z odcinkiem CD

D: Aby udowodnić powyższe twierdzenie, wystarczy wykazać, że $|DF| = |FC|$.
Z założenia $ABCD$ jest trapezem, z czego wynika, że $\triangle\ AOB$ i $\triangle\ COD$ są podobne. Analogicznie podobne są także $\triangle\ BOE$ i $\triangle\ DOF$ oraz $\triangle\ AOE$ i $\triangle\ COF$. Z tego wynika, że $\frac{|DF|}{|EB|} = \frac{|OF|}{|AE|}$ oraz $\frac{|FC|}{|AE|} = \frac{|OF|}{|OE|}$, zatem $\frac{|DF|}{|EB|} = \frac{|FC|}{|AE|}$. Z założenia $|AE| = |EB|$, stąd $|DF| = |FC|$, wobec tego punkty E, O, F są współliniowe.

6. Punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki. Wykaż, że $|\sphericalangle A_1BA_{16}| = 105°$, gdzie B jest punktem przecięcia się cięciw A_1A_{10} i A_5A_{16}.



D: Korzystając z własności kątów wpisanych i opisanych na okręgu i opartych na tym samym łuku mamy:

$|\sphericalangle A_1A_{10}A_5| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{24} \cdot 360° = 30°$ oraz

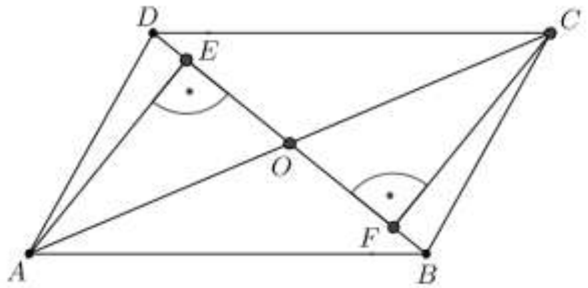
$|\sphericalangle A_{16}A_5A_{10}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{24} \cdot 360° = 45°$, z tego wynika, że

$|\sphericalangle A_5BA_{10}| = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Zatem $|\sphericalangle A_1BA_{16}| = |\sphericalangle A_5BA_{10}| = 105°$.

7. Wykaż, że jeżeli każda z dwóch przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

D: Aby wykazać, że $ABCD$ jest równoległobokiem, należy udowodnić, że przekątne czworokąta $ABCD$ dzielą się na połowy.



Z założenia wynika, że $P_{\Delta ABD} = P_{\Delta BCD}$ i $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC}$.

Z pierwszego równania wynika, że

$\frac{1}{2}|BD| \cdot |AE| = \frac{1}{2}|BD| \cdot |CF| \Rightarrow |AE| = |CF|$.

Zauważmy, że $P_{\Delta BOC} + P_{\Delta COD} = P_{\Delta BOC} + P_{\Delta AOB}$

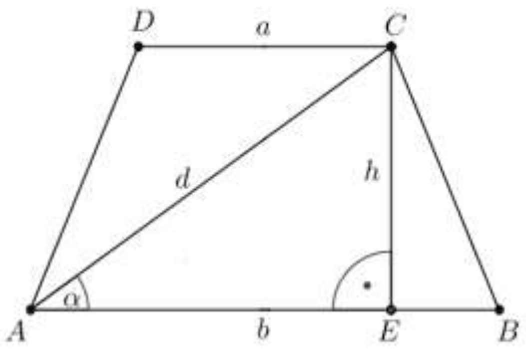
$\Rightarrow P_{\Delta COD} = P_{\Delta AOB} \Rightarrow |DO| = |BO| \Rightarrow O$ jest środkiem przekątnej BD. Postępując analogicznie możemy stwierdzić, że O jest środkiem przekątnej AC, zatem $ABCD$ jest równoległobokiem.

8. Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego, w którym przekątna o długości d tworzy z dłuższą podstawą kąt α, jest równe $P = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$.

Z: $ABCD$ – trapez równoramienny

d – przekątna trapezu

α – kąt, który przekątna tworzy z dłuższą podstawą

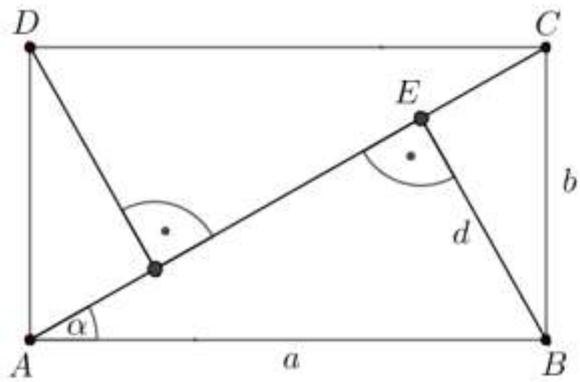


D: Z założenia, że czworokąt $ABCD$jest trapezem równoramiennym wynika, że $|AE| = \frac{a+b}{2}$.

W $\triangle\ EAC$ mamy: $\frac{h}{d} = \sin\alpha\ \Rightarrow\ h = d \cdot \sin\alpha$ oraz $\frac{|AE|}{d} = \cos\alpha\ \Rightarrow\ |AE| = d \cdot \cos\alpha$

$P_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = |AE| \cdot h = d\cos\alpha \cdot d\sin\alpha = d^2 \sin\alpha\cos\alpha$. Korzystając z funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$) otrzymamy $P_{ABCD} = \frac{1}{2} d^2 \sin 2\alpha$.

9. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$. Wykaż, że odległości wierzchołków B i D od prostej AC są równe $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Z: d – odległość wierzchołka B od prostej AC

α – kąt, jaki tworzy odcinek AB z przekątną AC

E – rzut prostokątny wierzchołka B na prostą AC

D: $\begin{cases} \text{w } \Delta ABE\text{: } \sin\alpha = \frac{d}{a}\ \Rightarrow\ d = a\sin\alpha \\ \text{w } \Delta ABC\text{: } \sin\alpha = \frac{b}{|AC|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = a \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Odległości wierzchołków B i D od prostej AC są równe $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10. Wykaż, że środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

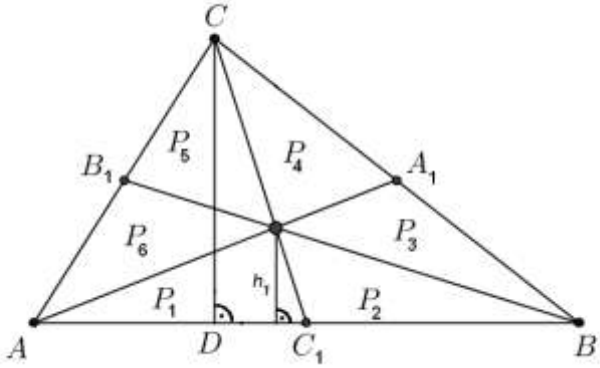
Z: $P_1 = P_{\Delta AC_1S}$

$P_2 = P_{\Delta BC_1S}$

$P_3 = P_{\Delta BSA_1}$

$P_4 = P_{\Delta A_1SC}$

$P_5 = P_{\Delta CSB_1}$



$P_6 = P_{\Delta ASB_1}$

D: $\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2}|AC_1| \cdot h_1 \\ P_2 = \frac{1}{2}|BC_1| \cdot h_1 \end{cases}$ Z założenia $|AC_1| = |BC_1|$, zatem $P_1 = P_2$, analogicznie $P_3 = P_4$ i $P_5 = P_6$.

Zauważmy, że środkowa CC_1 dzieli ΔABC na dwa trójkąty C_1BC i AC_1C o równych bokach $|C_1C| = |AC_1|$ i wspólnej wysokości CD, zatem $P_2 + P_3 + P_4 = P_1 + P_5 + P_6$. Uwzględniając powyższe równości ($P_1 = P_2$, $P_3 = P_4$, $P_5 = P_6$) możemy zapisać, że $P_3 = P_5$ oraz $P_4 = P_6$, czyli $P_1 = P_2 = P_3 == P_4 = P_5 = P_6$.

11. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość c, zaś kąt wewnętrzny przy podstawie ma długość α. Uzasadnij, że długość środkowej tego trójkąta jest równa $x = \frac{c\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$.

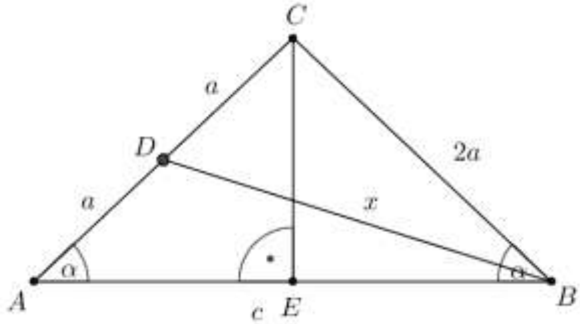
Z: $|AC| = |BC| = 2a$

$|BD| = x$

$|AB| = c$

$|CE|$ - wysokość poprowadzona na podstawę AB,

$\alpha \in (0, 90°)$

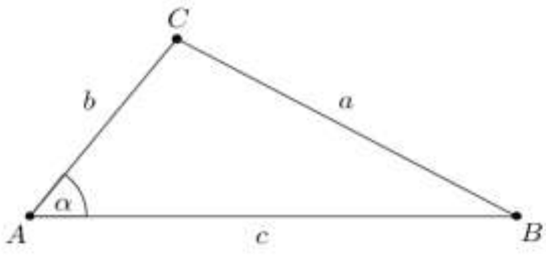


D: W $\triangle AEC$: $|AE| = \frac{1}{2}c \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}c}{2a} = \cos\alpha \Rightarrow a = \frac{c}{4\cos\alpha}$.

W $\triangle ABD$ z twierdzenia cosinusów: $x^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow x^2 = \frac{c^2}{16\cos^2\alpha} + c^2 - \frac{2c^2\cos\alpha}{4\cos\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = c^2\left(\frac{1}{16\cos^2\alpha} + 1 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 = c^2\frac{1+8\cos^2\alpha}{16\cos^2\alpha}$, wobec tego $x = \frac{c\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$.

12. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, a kąt α jest kątem wewnętrzym zawartym między bokami o długości b i c, to $\frac{a^2}{2bc} + \cos\alpha \geq 1$.



D: Przyjmijmy oznaczenia tak jak na rysunku obok.

Korzystając z twierdzenia cosinusów mamy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Korzystając z nierówności $(b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{2bc} \geq 1$, wobec tego $\frac{a^2}{2bc} + \cos\alpha = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$

$= \frac{b^2+c^2}{2bc} \geq 1$.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Uzasadnij, że pole kwadratu wpisanego w okrąg o równaniu $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ jest równe 50.

D: Przekształćmy równanie okręgu do postaci kanonicznej:

$x^2+y^2-4x+6y-12=0 \iff (x-2)^2+(y+3)^2=25,\ r=5$

Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu $r=5$ jest równe $P=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2=\frac{1}{2}\cdot 100=50$.

2. Dane są końce $A=(3,0)$ i $C=(-4,1)$ przekątnej kwadratu $ABCD$. Uzasadnij, że pozostałe wierzchołki mają współrzędne $B=(0,4)$ i $D=(-1,-3)$.

D: Wyznaczmy równanie prostej AC: $y=-\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$, środek odcinka AC: $S=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ oraz równanie prostej BD, która jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt S; $BD: y=7x+4$.

Aby wyznaczyć współrzędne wierzchołków B i D należy skorzystać z odległości punktu od prostej lub rozwiązać układ równań:

$\begin{cases} y=7x+4 \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=r^2 \end{cases}$, gdzie $r=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}\sqrt{49+1}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

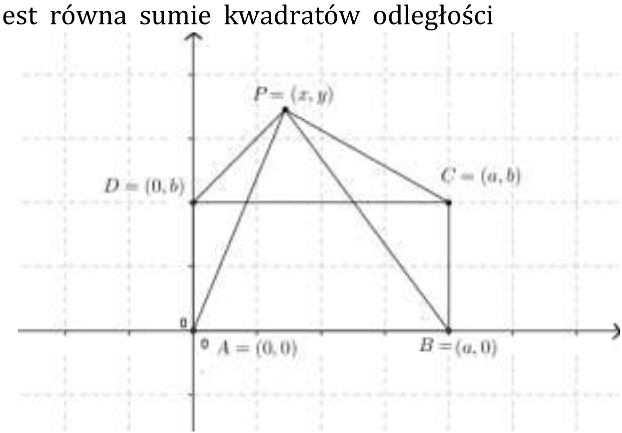
$\begin{cases} y=7x+4 \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow 50x^2+50x=0 \iff x(x+1)=0 \iff (x=0 \lor x=-1)$,

zatem $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$.

Pozostałe wierzchołki kwadratu mają współrzędne $(0,4)$; $(-1,-3)$.

3. Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków przeciwległych A i C prostokąta $ABCD$ jest równa sumie kwadratów odległości punktu P od wierzchołków B i D.

D: Umieśćmy prostokąt $ABCD$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Wówczas:



$$\begin{cases} |AP|^2 + |CP|^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ |BP|^2 + |DP|^2 = (x-a)^2 + y^2 + x^2 + (y-b)^2 \end{cases}$$

Z powyższego wynika, że $|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$

4. Uzasadnij, że długość promienia okręgu r wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (-4,0)$ i $C = (0,4)$ jest równy $r = 4 - 2\sqrt{2}$.

D: Zauważmy, że ΔABC jest prostokątny, gdzie $|AC| = 4$, $|AB| = 4$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$.

Korzystając z własności, że długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wyraża się wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$ obliczamy długość promienia $r = \frac{4+4-4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$.

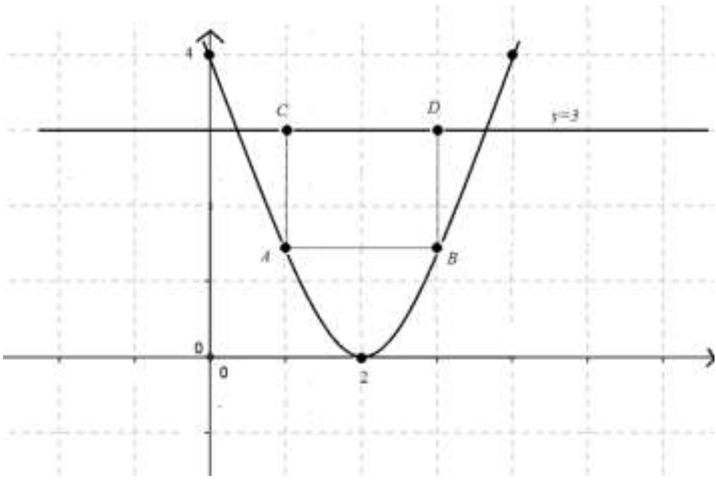
5. Dwa wierzchołki A i B prostokąta leżą na paraboli o równaniu $y = x^2 - 4x + 4$, a pozostałe dwa C i D na cięciwie paraboli wyznaczonej przez prostą $y = 3$. Uzasadnij, że największa wartość pola prostokąta $ABCD$ wynosi 4.

Z: $A = (x, (x-2)^2)$, gdzie $x \in (0; 2)$

$B = (4 - x, (x-2)^2)$

$C = (4 - x, 3)$

$D = (x, 3)$



D:

$P_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = \sqrt{(4-x-x)^2} \cdot \sqrt{(x-x)^2 + (3-(x-2)^2)^2} =$

$= |4 - 2x| \cdot |3 - (x-2)^2| =$

$= |-2x^3 + 12x^2 - 18x + 4| \;\wedge\; x > 0.$

Wyznaczmy pochodną funkcji $P(x)$.

$P`(x) = |-6x^2 + 24x - 18| = |-6(x-1)(x-3)|$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $P`(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 3)$

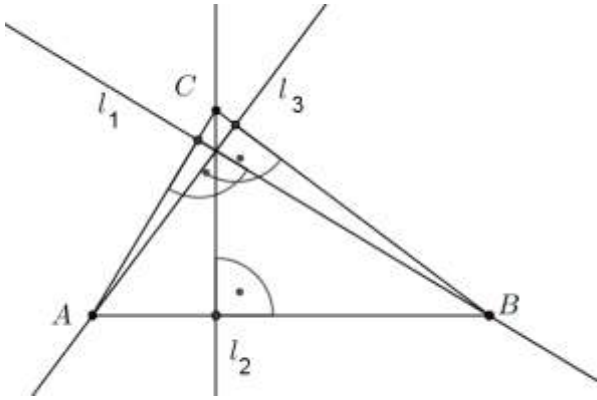
Warunek wystarczający istnienia ekstremum: $P`(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (3; \infty)$

$$P`(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 3) \wedge x \in (0; 2)$$

Wobec tego $P_{max} = P(1) = 4$.

6. Dwie wysokości trójkąta ABC, gdzie $A = (3, -4)$ zawarte są w prostych o równaniach $y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ i $y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$. Uzasadnij, że pozostałe wierzchołki trójkąta mają współrzędne $B = (-4, -2)$ oraz $C = (1, 3)$.

D: Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta są prostopadłe do prostych zawierających boki tego trójkąta.



$AC \perp l_1 \wedge AB \perp l_2$

$AC: y = -\frac{7}{2}x + b \wedge A = (3, -4) \in AC \Rightarrow b = \frac{13}{2}$

$AC: y = -\frac{7}{2}x + \frac{13}{2}$

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej AB.

$AB: y = -\frac{2}{7}x + b \wedge A = (3, -4) \in AB \Rightarrow AB: y = -\frac{2}{7}x - \frac{22}{7}$

Rozwiązując dwa układy równań wyznaczymy współrzędne szukanych punktów.

$$\begin{cases} y = -\frac{7}{2}x + \frac{13}{2} \\ y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2}x + \frac{13}{2} = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (1, 3)$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ y = -\frac{2}{7}x - \frac{22}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{7}x + \frac{6}{7} = -\frac{2}{7}x - \frac{22}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B = (-4, -2)$$

7. Uzasadnij, że okrąg o środku $S = (4, 2)$, który na prostej o równaniu $x - y - 6 = 0$ odcina cięciwę o długości $2\sqrt{2}$ określa się wzorem $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Z założenia $|AB| = 2\sqrt{2}$, stąd $|BD| = \sqrt{2}$.

Korzystając z odległości punktu od prostej wyznaczmy długość odcinka SD, a następnie korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczmy długość promienia r.

$$d(S,l) = \frac{|4-2-6|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$r^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 10$$

Równanie okręgu przyjmuje postać $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.

8. Prosta o równaniu $x + 2y = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ w punktach A i B. Uzasadnij, że okrąg, którego środek leży na prostej $6x + 2y + 5 = 0$ i który przechodzi przez punkty A i B określa się wzorem $(x-1)^2 + (y + \frac{11}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

D: Wyznaczmy współrzędne punktów przecięcia się prostej i paraboli:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}(-2y-2)^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y(y+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y = 0 \ \vee \ y = -3)$$

Z powyższego wynika, że $A = (0,0)$ oraz $B = (6,-3)$.

Punkty A i B należą do okręgu o środku $S = (a,b)$, którego współrzędne należą do prostej $6x + 2y + 5 = 0$, gdy spełniony jest warunek $|AS|^2 = |BS|^2$. Wobec tego $|AS|^2 = a^2 + b^2 \ \wedge$ $|BS|^2 = (a-b)^2 + (b+3)^2$, zatem $a^2 + b^2 = a^2 - 12a + 36 + b^2 + 6b + 9 \Leftrightarrow 12a - 6b = 45 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 15 \\ 6a + 2b = -5 \quad (z\ warunku, że\ S = (a,b) \in l) \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow S = (1, -\frac{11}{2})$.

$r^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow r^2 = 1 + \frac{121}{4} \Leftrightarrow r^2 = \frac{125}{4}$, zatem okrąg ma równanie $(x-1)^2 + (y + \frac{11}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

9. Uzasadnij, że okrąg symetryczny do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6y = 0$ względem prostej $x - y - 1 = 0$ określa się wzorem $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

D: Aby wyznaczyć równanie okręgu O_2 symetrycznego do okręgu O_1 względem prostej l należy przekształcić środek $S = (0, 3)$ względem prostej l.

Przekształćmy równanie okręgu do postaci kanonicznej: $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, $S = (0, 3)$, $r = 3$

Wyznaczmy równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt S, zatem $k: y = -x + 3$. Proste te przecinają się w punkcie M, który jest środkiem odcinka $SS`$.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \ \wedge \ x = 2 \Rightarrow M = (2, 1)$$

Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy:

$$\begin{cases} \dfrac{x` + 0}{2} = 2 \\ \dfrac{y` + 3}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x` = 4 \\ y` = -1 \end{cases} \Rightarrow S` = (4, -1) \ \wedge \ r` = r$$

Okrąg po przekształceniu względem prostej l ma równanie $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

10. Uzasadnij, że odległość punktu $P = (1, -3)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$ oraz $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ wynosi $4\sqrt{2}$.

D: Wyznaczmy równanie prostej, do której należą punkty wspólne okręgów:

$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8$

$6x - 6y + 24 = 0$

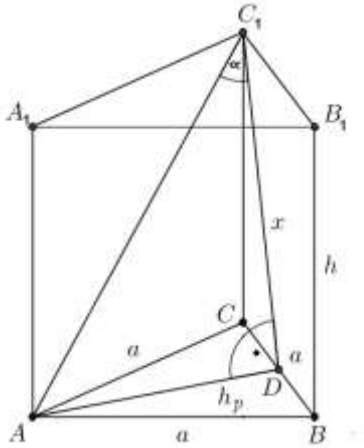
$l: x - y + 4 = 0$

Korzystając ze wzoru na odległość punktu $P = (1, -3)$ od prostej l mamy:

$d(P, l) = \frac{|1+3+4|}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

STEREOMETRIA

1. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Wykaż, że tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany jest równy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.



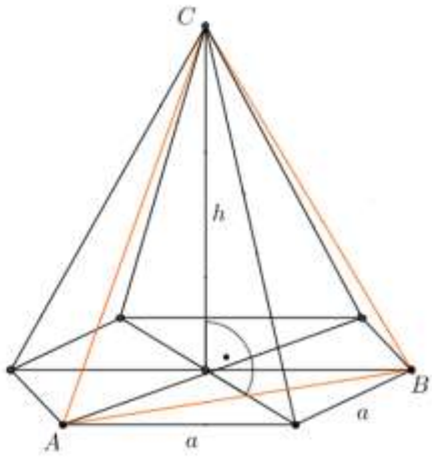
D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Z założenia mamy: $3ah = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, po przekształceniu $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

W ΔADC_1: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_p}{x}$ oraz $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i

$x = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{36} + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$, zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$.

2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 12, a jego wysokość jest równa 24. Wykaż, że pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i krótszą podstawę jest równe $36\sqrt{51}$.



Z: $a = 6$

$h = 24$

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Przekrojem tego ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego podstawą jest krótsza przekątna sześciokąta foremnego, zatem:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot h_p$, gdzie h_p- wysokość ΔABC

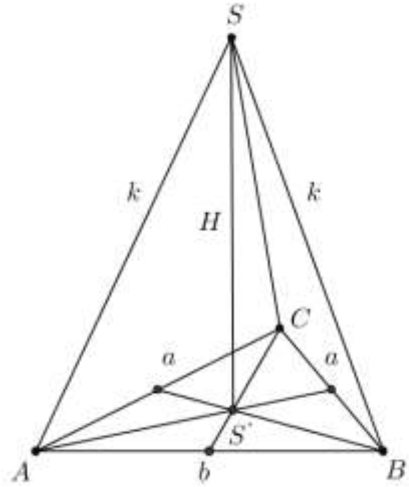
$h_p = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{24^2 + \frac{1}{4} \cdot 12^2} = 6\sqrt{17}$, wobec tego $P_p = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{17} = 36\sqrt{51}$.

3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości $10\ cm$ i podstawie o długości $16\ cm$. Wszystkie krawędzie boczne są równe $10\ cm$. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{80\sqrt{11}}{3}\ cm^3$.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.

Wyznaczmy objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$, gdzie H- wysokość ostrosłupa

Obliczmy pole podstawy ostrosłupa $P_p = P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h_p$ i $h_p = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, zatem $P_p = 48\ cm^2$.



Korzystamy z własności: jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, to spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Wyznaczmy długość promienia okręgu opisanego na ΔABC.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta mamy $P_p = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 48 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 16}{4R} \Rightarrow R = \frac{25}{3}\ cm$.

Z twierdzenia Pitagorasa w $\Delta AS`S$: $H = \sqrt{k^2 - R^2} = \sqrt{100 - \frac{625}{9}} =$

$= \frac{5\sqrt{11}}{3}\ cm$.

Wyznaczmy objętość tego ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot \frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{80\sqrt{11}}{3}\ cm^3$.

4. Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α, β, γ. Wykaż, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

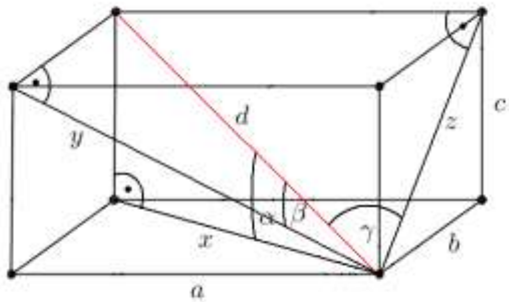
D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$

$y = \sqrt{a^2 + c^2}$

$z = \sqrt{b + c^2}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznej mamy:

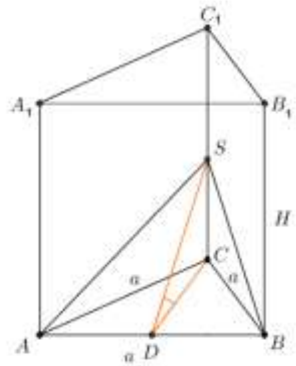
$\cos\alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{x^2}{d^2}$,

$\cos\beta = \frac{y}{d} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{y^2}{d^2}$,

$\cos\gamma = \frac{z}{d} \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{z^2}{d^2}$,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{d^2} = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{d^2} = \frac{2d^2}{d^2} = 2.$

5. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy długości a poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Kąt nachylenia płaszczyzny jest równy $\alpha, \alpha \in (0°, 90°)$. Udowodnij, że objętość tego graniastosłupa jest równa $V = \frac{3a^2 \operatorname{tg}\alpha}{4}$.



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$|CS| = \frac{1}{2}H$

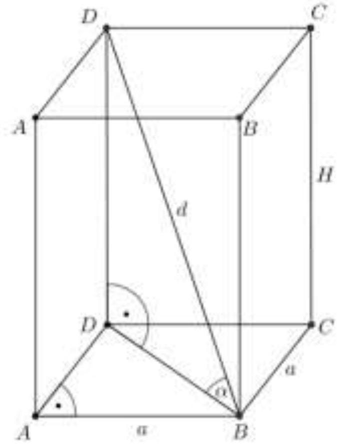
$|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Wyznaczmy objętość graniastosłupa: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$.

W ΔSCD: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow H = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha$, zatem

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{3a^2 \operatorname{tg}\alpha}{4}$.

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Uzasadnij, że cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

W ΔDBD_1: $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$.

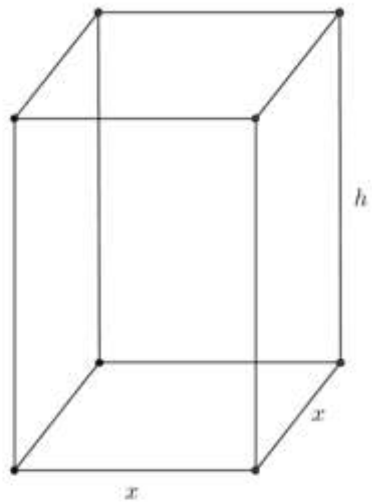
Z warunków zadania wynika, że $4aH = 2a^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}a$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa $d^2 = H^2 + 2a^2 \Leftrightarrow d^2 =$

$= \frac{1}{4}a^2 + 2a^2 \Leftrightarrow d = \frac{3a}{2}$, zatem $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 120. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest największe, gdy prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi długości 10.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.



Z warunków zadania wynika: $8x + 4h = 120 \Rightarrow h = 30 - 2x$; $x \in (0; 15)$.

Wyznaczmy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$P = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x(30 - 2x) = -6x^2 + 120x$

$P(x) = -6x^2 + 120x \ \wedge \ x \in (0; 15)$

$P(x)$- funkcja kwadratowa, która osiąga wartość największą dla

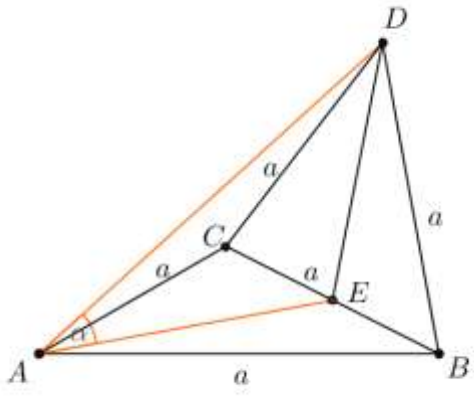
$x_w = \frac{-120}{-12} = 10 \Rightarrow x = 10 \wedge h = 10$

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest największe, gdy jest on sześcianem o krawędzi długości 10.

8. Podstawa ABC i ściana boczna BCD trójkątnego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o boku a. Krawędź DA jest nachylona do podstawy ostrosłupa pod kątem α. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa wynosi $V = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{8}$.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Z założenia wynika, że $\triangle\, AED$ jest równoramienny o boku długości $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Wyznaczmy objętość tego ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$, gdzie

H- wysokość ostrosłupa, którą wyznaczymy z porównania pola $\triangle AED$

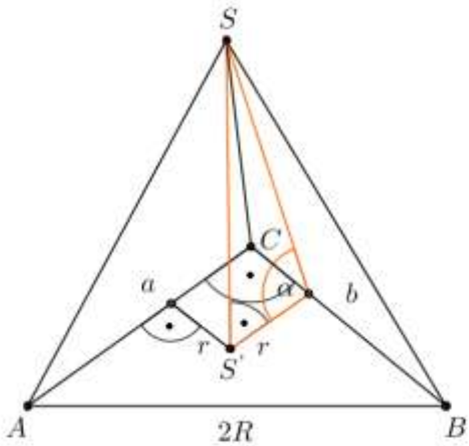
$$\begin{cases} P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{3a^2}{8} \cdot \sin 2\alpha \\ P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot H \end{cases} \Rightarrow H = \frac{\sqrt{3}a \sin 2\alpha}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a \sin 2\alpha}{2} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{8}$$

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym r jets długoscią promienia okręgu wpisanego, oraz R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Wszystkie ściany boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α. Wykaż, ze objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}r^2 \operatorname{tg} \alpha\ (2R + r)$.

Z: r- długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny

R- długość okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Wyznaczmy wysokość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot H$

Jeżeli wszystkie krawędzie boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to spodek wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt w podstawie.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{r} \Rightarrow H = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Korzystając z własności trójkąta prostokątnego $2R + 2r = a + b$.

Podnosząc obie strony równania do kwadratu otrzymamy $4R^2 + 8Rr + 4r^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w ΔABC mamy $a^2 + b^2 = 4R^2$, zatem

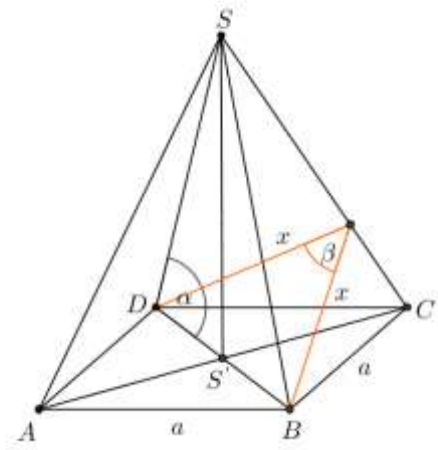
$4R^2 + 8Rr + 4r^2 = 4R^2 + 2ab \Rightarrow \frac{ab}{2} = 2Rr + r^2$.

Podstawiając do wzoru na objętość ostrosłupa mamy $V = \frac{1}{3} \cdot (2Rr + r^2) \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} r^2 \operatorname{tg} \alpha \, (2R + r)$.

10.

11. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Wykaż, że $\cos \beta = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$, gdzie β jest kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi w tym ostrosłupie.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.



Korzystając z twierdzenia cosinusów w ΔAEC:

$2a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta \;\Rightarrow\; a^2 = x^2(1 - \cos \beta)$

Zauważmy, że ΔAEB jest prostokątny, zatem $\sin \alpha = \frac{x}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = a \cdot \sin \alpha$.

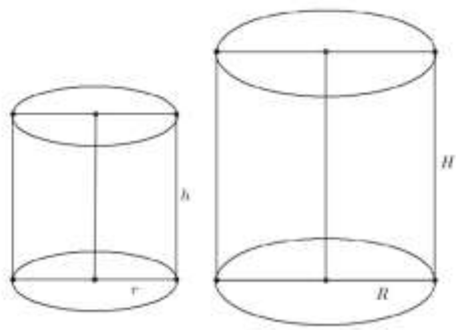
$a^2 = a^2 \sin^2 \alpha \, (1 - \cos \beta) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha = -\sin^2 \alpha \cos \beta \;\Leftrightarrow\; \cos^2 \alpha = -\sin^2 \alpha \cos \beta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \beta = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$

12. Stosunek objętości dwóch walców podobnych jest równy $1:8$. Różnica pól przekrojów osiowych tych walców jest równa $216\ cm^2$, a suma długości promieni podstaw obu walców wynosi $9\ cm$. Uzasadnij, że różnica objętości tych walców wynosi $756\pi\ cm^3$.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.



Z założenia walce te są podobne i $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; k^3 = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{2}$, zatem $R = 2r$ i $H = 2h$.

Z warunków zadania wynika, że

$R + r = 9 \;\Rightarrow\; r = 3\ cm$, $2RH - 2rh = 216 \;\Rightarrow\; RH - rh = 108$.

Uwzględniając powyższe warunki mamy

$6 \cdot 2h - 3h = 108 \;\Rightarrow\; h = 12\ cm$.

Obliczając objętości walców V_1 i V_2 mamy:

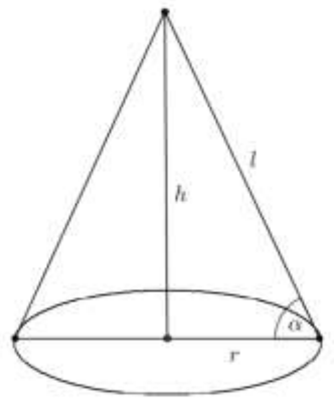
$V_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot 24 = 864\pi\ cm^2$

$V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi\ cm^2$

$V_1 - V_2 = 864\pi - 108\pi = 756\pi\ cm^3$

13. Pole przekroju osiowego stożka jest $\sqrt{3}\pi$ razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej tego stożka. Wykaż, że tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$.

D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.



Z warunków zadania wynika, że $\sqrt{3}\pi P_p = P_c$, zatem:

$\sqrt{3}\pi rh = \pi r^2 + \pi rl$

$\sqrt{3}h = r + l$

$\sqrt{3} = \frac{r}{h} + \frac{l}{h}$

$\sqrt{3} = \operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\ ;\ \ \alpha \in (0°; 90°)$

$\sqrt{3}\sin\alpha = \cos\alpha + 1$

$3\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1$

$3(1 - \cos^2\alpha) = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1$

$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

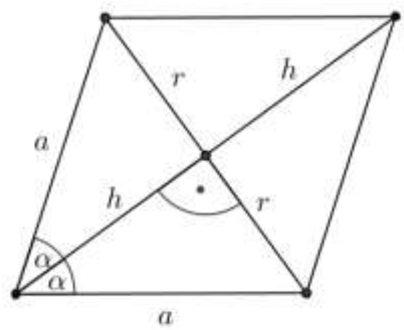
$2(\cos\alpha - 1)\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \notin D\ \ \vee\ \ \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

14. Romb o kącie ostrym 2α obraca się raz wokół krótszej przekątnej, a drugi raz wokół dłuższej przekątnej. Uzasadnij, że stosunek objętości tych brył jest równy $\frac{V_1}{V_2} = \operatorname{tg}\alpha$.

D: : Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Zauważmy, że przekątne rombu dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h \cdot \operatorname{tg}\alpha$



W wyniku obrotu rombu wokół krótszej lub dłuższej przekątnej otrzymamy dwa przystające stożki złączone podstawami, zatem:

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi h^2 r = \frac{2}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

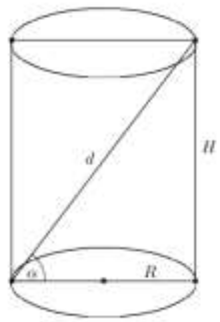
$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi h^3 \operatorname{tg} \alpha$$

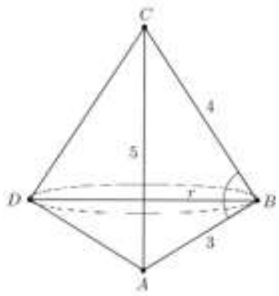
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\frac{2}{3}\pi h^3 \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

15. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawa walca kąt 30°. Wykaż, że jeżeli przekątna ta ma długość $8\sqrt[3]{0{,}2}$, to objętość walca jest równa objętości bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4 dookoła przeciwprostokątnej.

Z: V_1- objętość walca

V_2- objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół przeciwprostokątnej





D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$$V_1 = \pi R^2 H$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Z porównania pola w ΔABC:

$$\begin{cases} P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \\ P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r \end{cases} \Rightarrow r = \frac{12}{5}, \text{zatem } V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 = 9{,}6\pi$$

Wyznaczmy objętość walca V_1.

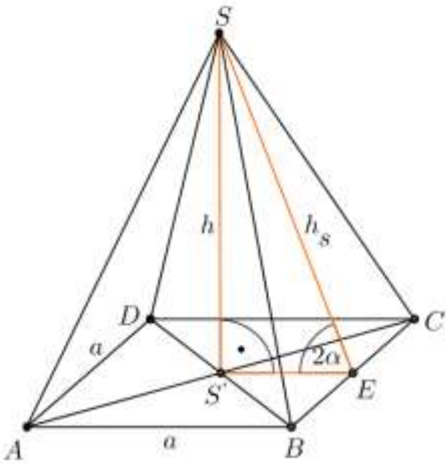
Zauważmy, że $\sin\alpha = \frac{H}{d} \Rightarrow H = d\sin\alpha \Rightarrow H = 8 \cdot \sqrt[3]{0{,}2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow H = 4\sqrt[3]{0{,}2}$

$$\cos\alpha = \frac{2R}{d} \Rightarrow 2R = d\cos\alpha \Rightarrow 2R = 8 \cdot \sqrt[3]{0{,}2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2 \cdot \sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt{3}$$

$$V_1 = \pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot 4\sqrt[3]{0{,}2} = 9{,}6\pi$$

Z powyższego wynika, że $V_1 = V_2 = 9{,}6\pi$

16. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa h. Kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy jest równy $2\alpha, \alpha \in (0°, 90°)$. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $P_c = \frac{4h^2}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}$.



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$$|S`E| = \frac{1}{2}a$$

W $\Delta SS`E$: $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h} \Rightarrow a = 2h \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = \frac{h}{h_s} \Rightarrow h_s = \frac{h}{\sin 2\alpha}$$

Wyznaczmy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

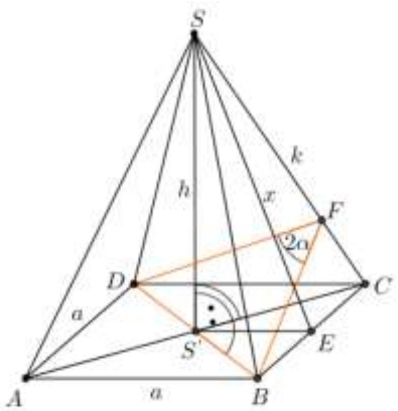
$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s = 4h^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha + 2 \cdot 2h \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \frac{h}{\sin 2\alpha} =$$

$$= 4h^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha + \frac{4h^2 \operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 4h^2 \operatorname{ctg} 2\alpha \left(\operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha}\right) =$$

$$= 4h^2 \operatorname{ctg} 2\alpha \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha}\right) = 4h^2 \operatorname{ctg} 2\alpha \left(\frac{2\cos^2\alpha - 1 + 1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right) =$$

$$= 4h^2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4h^2}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}$$

17. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości h kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy $2\alpha, \alpha \in (0°, 90°)$. Uzasadnij, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{2}{3}h^3(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)$.



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Wyznaczmy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}a^2h$ (należy uzależnić a od h i α)

Z porównania pola ΔBCS mamy:

$$\begin{cases} P_{\Delta BCS} = \frac{1}{2}xk \\ P_{\Delta BCS} = \frac{1}{2}ah_s \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad k = \sqrt{h^2 + \frac{2a^2}{4}}; \quad h_s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}; \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha}.$$

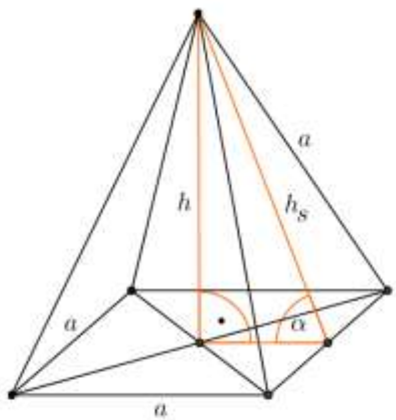
Wobec tego mamy $\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha}\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{h^2+\frac{2a^2}{4}}$, podnieśmy równość obustronnie do kwadratu:

$$\frac{1}{2\sin^2\alpha}\left(h^2+\frac{a^2}{2}\right)=h^2+\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}\left(\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=h^2\left(1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=2h^2\left(\frac{2\sin^2\alpha-1}{2\sin^2\alpha}\right)\Leftrightarrow a^2=2h^2\left(\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\Leftrightarrow a^2=2h^2(\mathrm{tg}^2\,\alpha-1)$$

Zatem $V=\frac{1}{3}\cdot 2h^2(\mathrm{tg}^2\,\alpha-1)\cdot h=\frac{2}{3}h^3(\mathrm{tg}^2\,\alpha-1)$.

18. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Uzasadnij, że cosinus kata nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



D: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Z założenia ściany boczne są trójkątami równobocznymi, dlatego $h_s=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Sześć ponumerowanych kul wrzucamy do pięciu ponumerowanych pudełek tak, aby trzy pudełka były puste. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo otrzymanego zdarzenia wynosi $\frac{124}{3125}$.

D: Zauważmy, że jeżeli wrzucamy sześć ponumerowanych kul do pięciu ponumerowanych pudełek to $|\Omega| = 5^6 = 15625$.

Zdarzenie A polega na tym, że trzy pudełka mają być puste, zatem kule trzeba umieścić tylko w dwóch pudełkach.

$\bar{\bar{A}} = C_5^2(2^6 - 2) = 10 \cdot (64 - 2) = 620$

$$P(A) = \frac{620}{15625} = \frac{124}{3125}$$

2. Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ścianę z trzema oczkami i suma liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie podzielna przez 3, jest równe $\frac{5}{432}$.

D: Doświadczenie polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, zdarzeniami elementarnymi są pięciowyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny $|\Omega| = 6^5$.

Zdarzenie A polega na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ścianę z trzema oczkami i suma liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie podzielna przez trzy. Ustalmy, na ile sposobów można wybrać pozycję dla trzech trójek w pięcioelementowym ciągu: $C_5^3 = 10$. Aby suma oczek była podzielna przez trzy, to pozostałe dwa wyrazy ciągu pięcioelementowego muszą wynosić: $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,4)$, $(4,2)$, $(4,6)$, $(6,4)$, $(6,6)$, $(1,5)$, $(5,1)$ (dziewięć możliwości). Zatem $\bar{\bar{A}} = 10 \cdot 9 = 90$.

$P(A) = \frac{90}{6^5} = \frac{5}{432}$.

3. Ze zbioru liczb $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oznaczając kolejno wylosowane liczby przez x, y, z, tworzymy liczbę $a = 100x + 10y + z$. Udowodnij, że prawdopodobieństwo zdarzenia A, że utworzona liczba a będzie trzycyfrowa i nieparzysta wynosi $\frac{40}{81}$.

D: Ze zbioru X losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, zatem wszystkich zdarzeń elementarnych jest $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Zdarzenie A polega na tym, że utworzona liczba ma być trzycyfrowa i nieparzysta. Cyfrę setek możemy wybrać na osiem sposobów, cyfrę dziesiątek także na osiem sposobów, a cyfrę jedności

na pięć sposobów, zatem $\overline{\overline{A}} = 8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$.

$P(A) = \frac{320}{648} = \frac{40}{81}$.

4. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ losujemy jednocześnie cztery liczby. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie liczby będą parzyste oraz dokładnie jedna liczba będzie podzielna przez 5 jest równe $\frac{16}{35}$.

D: Ze zbioru X losujemy jednocześnie cztery liczby, zatem wszystkich zdarzeń elementarnych jest $C_{10}^{4} = 210$.

Zdarzenie A polega na tym, aby dokładnie dwie liczby były parzyste i dokładnie jedna liczba była podzielna przez 5. Należy rozpatrzeć dwa przypadki:

1° Jeżeli wylosujemy liczbę 5, to należy dodatkowo wylosować jedną liczbę nieparzystą (prócz 5) oraz dwie liczby parzyste (bez 10), zatem $\overline{\overline{A_1}} = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

2° Jeżeli wylosujemy liczbę 10, to należy wylosować jeszcze jedną liczbę parzystą (bez 10) i dwie liczby nieparzyste (bez 5), zatem $\overline{\overline{A_2}} = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} = 48 \cdot 2 = 96$

$$P(A) = \frac{96}{210} = \frac{16}{35}$$

5. Rzucono dziesięć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymano sześć oczek, pod warunkiem, że otrzymano trzy szóstki, wynosi $\frac{3}{10}$.

D: Rzucono dziesięć razy symetryczną sześcienną kostką do gry, zatem wszystkich zdarzeń elementarnych jest $|\Omega| = 6^{10}$.

Zdarzenie A polega na tym, że w pierwszym rzucie otrzymano sześć oczek, pod warunkiem, że otrzymano trzy szóstki. Należy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ \wedge \ P(B) > 0, \ \ A, B \subset \Omega$$

Prawdopodobieństwo warunkowe możemy również obliczyć zmieniając przestrzeń zdarzeń elementarnych ograniczając ją tylko do tych zdarzeń, które sprzyjają zdarzeniu B (to zbiór Ω_B), ale wtedy obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia A korzystamy już tylko ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne (na przestrzeń Ω_B).

$$|\Omega_B| = \underbrace{C_{10}^{3}}_{\substack{wybieramy \\ miejsce\ dla \\ trzech\ 6}} \cdot 5^7 = 120 \cdot 5^7$$

$$\bar{\bar{B}} = \underbrace{1}_{\substack{6\ na \\ pierwszym \\ miejscu}} \cdot \underbrace{C_{9}^{2}}_{\substack{wybieramy \\ miejsce\ dla \\ dwóch\ 6}} \cdot 5^7 = 36 \cdot 5^7$$

$P(A|B) = P(B|\Omega_B) = \frac{36 \cdot 5^7}{120 \cdot 5^7} = \frac{3}{10}$.

6. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Uzasadnij, że $P(A - B) = 0$.

D: $A, B \subset \Omega \ \wedge \ \mathrm{P(A \cup B) = P(B)} \Rightarrow A \subset B$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \ A \neq B$

$P(A - B) = P(\emptyset) = 0$

7. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\frac{1}{6} \leq P(A - B) \leq \frac{2}{3}$.

D: $A, B \subset \Omega \ \wedge \ \mathrm{P(A)} = \frac{2}{3} \ \wedge \ P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) \leq P(A - B) \leq P(A)$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \leq P(A - B) \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{6} \leq P(A - B) \leq \frac{2}{3}$$

8. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że są niezależne i $P(B) > 0$ oraz $4P(A) = 7P(A \cap B)$. Uzasadnij, że $P(B`) = \frac{3}{7}$.

D: $A, B \subset \Omega$ są niezależne $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Z założenia $4P(A) = 7P(A \cap B)$, zatem $4P(A) = 7P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A)[7P(B) - 4] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{P(A) = 0}_{nie\ możliwe} \lor 7P(B) = \frac{4}{7}$.

Korzystając z własności $P(B`) = 1 - P(B)$, $P(B`) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

1. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^4}{x^2+1}$ poprowadzono styczne w punktach, w których rzędna (y) jest równa 1. Uzasadnij, że obwód trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt wspólny tych stycznych, jest równy $2 + 2\sqrt{10}$.

D: Z warunków zadania wynika, że $f(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2{x_0}^4}{{x_0}^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2{x_0}^4 - {x_0}^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left({x_0}^2 + \frac{1}{2}\right)({x_0}^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow {x_0}^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 = 1 \vee x_0 = -1)$.

Proste są styczne do wykresu funkcji w punktach $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (1, 1)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ ma równanie $y = f`(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$f`(x) = \frac{4x^5 + 8x^3}{(x^2+1)^2}$$

Prosta l_1 styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $P_1 = (-1, 1)$ ma równanie:

$l_1 \colon y = \left(\frac{-4-8}{4}\right)(x + 1) + 1 \Rightarrow y = -3x - 2$.

Prosta l_2 styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $P_1 = (1, 1)$ ma równanie:

$l_2 \colon y = \left(\frac{4+8}{4}\right)(x - 1) + 1 \Rightarrow y = 3x - 2$.

Z warunków zadania należy wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się stycznych:

$$\begin{cases} y = -3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Punkty $M = (0, -2)$, $P_1 = (-1, 1)$ i $P_2 = (1, 1)$ są wierzchołkami trójkąta, którego obwód należy wyznaczyć.

$|P_1P_2| = 2$, $|P_1M| = \sqrt{10}$, $|P_2M| = \sqrt{10}$, wobec tego $L_{\triangle P_1P_2M} = 2 + 2\sqrt{10}$.

2. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$. Uzasadnij, że prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i styczna do wykresu funkcji f określona jest równaniem $y = 12x$.

D: Prosta styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ ma równanie $y = f`(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Obliczamy pochodną funkcji $f(x)$:

$f`(x) = 32x - \frac{1}{x^2}$, zatem $y = \left(32x_0 - \frac{1}{{x_0}^2}\right)(x - x_0) + 16{x_0}^2 + \frac{1}{x_0}$.

Do stycznej należy punkt $P = (0, 0)$, wobec tego mamy:

$0 = \left(32x_0 - \frac{1}{{x_0}^2}\right)(-x_0) + 16{x_0}^2 + \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

Podstawiając wyznaczone dane do równania stycznej otrzymujemy $y = 12x$ – równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$.

3. Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania z parametrem m $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2\right)x^2 + mx + m = 0$. Uzasadnij, że funkcja $f(m) = x_1 + x_2$ nie ma ekstremów lokalnych.

D: x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2\right)x^2 + mx + m = 0$ wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\sqrt{2} \wedge m \neq \sqrt{2} \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2\right) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

Funkcja $f(m) = x_1 + x_2 = \frac{-m}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2} = \frac{4m}{m^2 - 2} \wedge m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \backslash \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie się pierwszej pochodnej.

$$f`(m) = \frac{4(m^2 - 2) - 8m^2}{(m^2 - 2)^2} = \frac{-4m^2 - 4}{(m^2 - 2)^2} \wedge m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \backslash \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

$f`(m) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0$ – równanie sprzeczne

Nie ma takiej wartości parametru m, dla której zerowałaby się pochodna funkcji, dlatego nie istnieje ekstremum funkcji $f(m) = x_1 + x_2$.

4. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6m^2x^2, x \in R$, gdzie m jest parametrem. Uzasadnij, że funkcja ma trzy ekstrema lokalne dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

D: Funkcja f jest różniczkowalna w R. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie się pierwszej pochodnej. Warunkiem wysterczającym istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej jest zmiana znaku pochodnej przy przejściu przez punkt, w którym pochodna się zeruje.

$f`(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12m^2x,\ x \in R$

Warunek konieczny: $f`(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - 2x + m^2) = 0 \Leftrightarrow (12x = 0 \vee$
$\vee\ x^2 - 2x + m^2 = 0)$

Warunek wystarczający: dla $x = 0$ pochodna się zeruje i przy przejściu przez ten punkt zmienia znak, czyli istnieje ekstremum. Funkcja $g(x) = x^2 - 2x + m^2$ ma dwa różne miejsca zerowe różne od zera $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 1)\backslash\{0\}$.

Zbadajmy warunek dla $m = 0$, to $f`(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x - 2)$.

$f`(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$

Pochodna przy przejściu przez punkt $x = 0$ nie zmienia znaku, zatem ekstremum funkcji w tym punkcie nie istnieje. Z tego wynika, że dla $m = 0$ istnieje tylko jedno ekstremum funkcji w punkcie $x = 2$.

Z powyższego wynika, że funkcja $y = f(x)$ ma trzy ekstrema dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

5. Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}, x \in R\backslash\{-2,2\}$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(0; 2)$, $(2;\ \infty)$.

D: Korzystamy z własności: jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz dla każdego $x \in (a; b)$ mamy $f`(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$.

Funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}, x \in R\backslash\{-2,2\}$ jest różniczkowalna w dziedzinie.

Obliczmy pochodną funkcji $f`(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$.

Zbadajmy znak pochodnej funkcji: $f`(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-10x}{(x^2-4)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 2$.

Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(0; 2)$, $(2; \infty)$.

6. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}, x \in R\backslash\{3\}$. Uzasadnij, że w przedziale $< 0; 2 >$ największa wartość funkcji wynosi -1, a najmniejsza -2.

D: Zbadajmy, czy funkcja ma ekstrema w przedziale $< 0; 2 >$.

Obliczmy pochodną: $f`(x) = \frac{(2x-3)(x-3)-x^2+3x-4}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} \;\wedge\; x \in < 0; 2 >$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f`(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5 \notin < 0; 2 >$

Warunek wystarczający istnienia ekstremum: $f`(x) > 0 \Leftrightarrow x \in < 0; 1)$

$f`(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2 >$

Dla $x = 1$ funkcja osiąga maksimum lokalne: $f(1) = -1 = M$.

Wyznaczmy wartości funkcji na końcach przedziału: $f(0) = -\frac{4}{3}$, $f(2) = -2$. Wobec tego największa wartość funkcji w tym przedziale wynosi -1, a najmniejsza -2.

7. Na krzywej o równaniu $xy = 4$ obrano punkty $A = (1, 4)$, $B = (2, 2)$ i C, przy czym obydwie współrzędne punktu C są ujemne. Wykaż, że pole ΔABC jest najmniejsze, gdy $C = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

D: Zadanie można rozwiązać na kilka sposobów.

1° $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d$, gdzie $|AB| = \sqrt{5}$, d – odległość punktu C od prostej AB

Pole trójkąta będzie najmniejsze, gdy odległość punktu $C = (x, \frac{y}{x})$ od prostej AB będzie najmniejsza.

2° Zadanie to można rozwiązać także korzystając ze wzoru na pole trójkąta w ujęciu analitycznym.

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}||\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})||$, gdzie $\overrightarrow{AB} = [1, -2]$ i $\overrightarrow{AC} = [x-1, \frac{4}{x} - 4]$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ x-1 & \frac{4}{x}-4 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{4}{x} - 4 + 2x - 2\right| = \left|\frac{2}{x} + x - 3\right| \;\wedge\; x < 0$ (z założenia)

$P`(x) = \frac{2}{x^2} - 1 = \frac{2-x^2}{x^2} \;\wedge\; x < 0$ (z założenia)

Warunek konieczny istnienia ekstremum:

$P`(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \notin D \vee x = -\sqrt{2}$

Warunek wystarczający istnienia ekstremum: $P`(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2})$

$P`(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}; 0)$

$P_{min} = P(-\sqrt{2}) \Rightarrow P_{\Delta ABC}$ jest najmniejsze dla $x = -\sqrt{2}$, zatem $C = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

8. Dany jest wielomian $W(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + b$, o którym wiadomo, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $(x-2)$ jest równa -2, zaś współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu w punkcie o odciętej 1 jest równy -1. Uzasadnij, że funkcja $y = W(x)$ jest rosnąca w przedziale $< 2; \infty)$.

D: Z warunków zadania wynika: $\begin{cases} W(2) = -2 \\ W`(1) = -1 \end{cases}$

$1° \; W(2) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 8a + b = 1 - 8a + b$

$W(2) = 2 \Leftrightarrow -8a + b = -3$

$2° \; W`(x) = x^3 + 3ax^2$

$W`(1) = -1 \Leftrightarrow 1 + 3a = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -3 + 8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{25}{3} \end{cases}$

Funkcja W przyjmuje postać $W(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{25}{3}$.

Korzystając z własności funkcji różniczkowalnej: jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym $(a; b)$ oraz dla każdego $x \in (a; b)$ mamy $f`(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$.

Obliczmy $W`(x) = x^3 - 2x^2$.

$W`(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$W_{min} = W(2)$, zatem funkcja W jest rosnąca w przedziale $< 2; \infty)$.

9. Uzasadnij, że największa wartość funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $< -10; -1 >$ jest równa -2.

D: Zbadajmy, czy funkcja f posiada w przedziale $< -10;\ -1 >$ ekstremum.

Obliczmy pochodną funkcji $f`(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\ \wedge\ x \in < -10; -1 >$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f`(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin D \vee x = -1$.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum: $f`(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty)$

$f`(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \backslash \{0\}$

Zatem $f_{max} = f(-1) = -2$ oraz $f_{min} = f(1)$, ale $x = 1 \neq D$.

Zbadajmy wartość funkcji dla $x = 10$: $f(-10) = -10\frac{1}{10}$.

Z powyższego wynika, że największa wartość funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $< -10;\ -1 >$ jest równa -2.