

Maria Romanowska

Matura 2016 matematyka

Ćwiczenia dla zakresu podstawowego

Zakres podstawowy

ODPOWIEDZI

Wydanie zgodne z nową podstawą programową

matematyka to proste 

ODPOWIEDZI

LICZBY RZECZYWISTE

- 1. b) 1.** **2. 810.** **3. $x = 2n + 2n + 4 + 2n + 6 + 2n + 8 = 8n + 18.$**
4. $r = 4.$ **5. 198.** **6. Niedziela.** **7. 720 cm.** **8. $\{14, 19\}.$**
9. $\{-4, -2, 0, 2, 4\}.$
10. a) $\{-319, -317, -315, -313\};$ b) $\{-208, -206, -204, -202\}.$ **11. $\{0, 2\}.$
12. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **13. $-1\frac{15}{26}.$** **14. $a - 6\sqrt{3}, -a = -6\sqrt{3}, \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$** **15. $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{W}.$**
16. 2. **17. $\frac{1}{3} + \frac{17}{33} = \frac{28}{33}.$** **18. $-\frac{4}{3}.$** **19. a) 18; b) 3; c) 9; d) 8.**
20. a) $3^{\frac{5}{2}};$ b) $5^{\frac{5}{2}}.$ **21. a) Tak; b) tak.** **22. a) $2^3;$ b) $5^{-2}.$**
23. a) 100; b) 56. **24. $b < c < a.$**
25. b) $a = 3^{100}(1 + 5 \cdot 3) = 3^{100} \cdot 16 = 16k, k \in \mathbb{N}.$
26. $7^n(49 + 1) - 2^n(4 + 1) = 50 \cdot 7^n - 5 \cdot 2^n = 50 \cdot 7^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 10(\underbrace{5 \cdot 7^n - 2^{n-1}}_{k \in \mathbb{N}}) = 10 \cdot k.$
27. $2016^{2013}(2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1) = 2016^{2013}(2016 + 1)^2 = 2016^{2013} \cdot 2017^2 = 2017 \cdot 2017 \cdot 2016^{2013}.$
28. Kod 25610244096; b) 3125625125.
**29. $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, n \in \mathbb{N}$ – kolejne liczby naturalne,
 $(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 =$
 $= 12n^2 + 36n + 35 = 12(n^2 + 3n + 2) + 11 = 12k + 11, k \in \mathbb{N}.$**
30. $3^{n-3}(1 + 3 + 9) + 5^{n+1}(1 + 25) = 13 \cdot 3^{n-3} + 26 \cdot 5^{n+1} = 13(3^{n-3} + 2 \cdot 5^{n+1}) = 13k, k \in \mathbb{N}.$
31. $3^{113}(3 \cdot 7 + 6) = 3^{113} \cdot 27 = 3^{113} \cdot 3^3 = 3^{116}.$ **32. a) $x = -\frac{4}{5};$ b) $x = -\frac{1}{3}.$**
33. a) $x \leq 13;$ b) $x \geq \frac{2}{3}.$ **34. a) $-19;$ b) $-\sqrt{3};$ c) 2.**
35. a) 12; b) 39; c) 132. **36. a) $a = b;$ b) $a > b;$ c) $b > a.$**
37. a) $\frac{9}{8};$ b) 9. **38. a) $x = 7;$ b) $x = 3125;$ c) $x = 10;$ d) $x = 4.$**
39. a) 17; b) 5; c) 0,3; d) 12; e) 7,2. **40. $\frac{18}{5}.$**
**41. a) $L = 3 \log 10^2 - \log 10^3 + 0 = 6 \log 10 - 3 \log 10 = 3 \log 10 = 3 = P;$
b) $L = \log 2 + \log (2^3)^{\frac{2}{3}} + \log 5^3 = \log 8 + \log 125 = \log 1000 = 3 \log 10 = 3 = P.$**
42. $L = \log^2 5 + 2 \log 2 \cdot \log 5 + \log^2 2 = (\log 5 + \log 2)^2 = (\log 10)^2 = 1 = P.$
43. $2a + 2b.$ **44. 5. **45. a) $m = 7;$ b) $m = -8.$**
46. Błąd bezwzględny $|r - p| = 20,$ błąd względny $\frac{|r - p|}{|r|} = \frac{1}{9}.$ **47. Bartek.******

48. a) $X: |r - p| = 4000$, $Y: |r - p| = 2000$; b) $X: 0,4\%$, $Y: 0,3\%$. Y popełnił mniejszy błąd.
49. a) Z nadmiarem; b) $2,5\%$. 50. Nie wystarczy, $|r - p| = 270$ zł, $\frac{|r - p|}{|r|} \cdot 100\% = 1,8\%$.
51. a) $x = 24, 58$; b) $x = 7, 53$.
52. $A = \langle -2; 6 \rangle$, $B = \langle -2; \infty \rangle$, $C = \langle -1; 10 \rangle$, $D = \langle -\infty; 7 \rangle$.
53. a) $A \cap B = \langle -5; 4 \rangle$; b) $A \cup B = \langle -\infty; 7 \rangle$; c) $A \setminus B = \langle 4; 7 \rangle$; d) $B \setminus A = \langle -\infty; -5 \rangle$.
54. a) $\langle -\infty; -3 \rangle$; b) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$; c) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle -5; 5 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$;
d) $\langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 0; 7 \rangle \cup \langle 7; \infty \rangle$.
55. a) 1; b) -4; c) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. 56. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) 16; c) -21.
57. a) $x \geq 2\frac{1}{2}$; b) $x < \frac{10}{3}$. 58. $88\% x$. 59. O 24 zł.
60. 1800 zł, 2196 zł. 61. a) 13 483,20 zł; b) 13 506,11 zł; c) 13 517,91 zł.
62. 141,6%. 63. Pan Kowalski, różnica 1644,1. 64. Jest wyższa o 5,6%.
65. a) 22 629 zł; b) po 12 latach.
66. IV rata 11 840 zł, V rata 9 920 zł. Pan Kowalski oddał 68 800 zł, 142,4%.
67. a) Wzrost o 0,7 punktów procentowych; b) 15,22%. 68. O 25%.
69. a) Obniżyło się o 5,2 punktów procentowych; b) o 35,135%.
70. a) $p = 0$; b) $p = 6643,98$ zł; c) $p = 16 910,06$ zł; d) $p = 21 262,06$ zł.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. a) $4x^2 - 4x + 1$; b) $2x^2 + 8\sqrt{2}x + 16$; c) $2x^2 - 8xy + 8y^2$; d) $x^2 - 7$; e) $3x^2 - 6y^2$.
2. a) $-20x^2 - 44x - 72, -99$; b) $8 - \sqrt{6}$; c) $-50x^2 + 120x - 57, -457 + 240\sqrt{2}$.
3. a) $11 + 5\sqrt{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3} - 3}{13}$; c) $\frac{7}{5}$.
4. a) $\frac{(2\sqrt{3} - 11)(2\sqrt{3} - 11)}{(2\sqrt{3} + 11)(2\sqrt{3} - 11)} + 44\sqrt{3} = \frac{12 - 44\sqrt{3} + 121}{12 - 11} + 44\sqrt{3} = 133 \in \mathbf{C}$;
b) $\frac{6(\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} - 3)}{2(2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3)} - 18\sqrt{2} = \frac{2(4 - 3\sqrt{7} - 6\sqrt{2} + 9)}{8 - 9} - 18\sqrt{2} = \frac{26 - 18\sqrt{2}}{-1} - 18\sqrt{2} = -26 \in \mathbf{C}$.
5. $x - 0$ lub $x = 1$.
6. Kolejne liczby niepodzielne przez 3, to $3n + 1, 3n + 2, n \in \mathbf{N}$.
 $(3n + 2)^2 + (3n + 1)^2 = 9n^2 + 12n + 4 + 9n^2 + 6n + 1 = 18n^2 + 18n + 5 = 3(\underbrace{6n^2 + 6n + 1}_{k \in \mathbf{N}}) + 2 = 3k + 2$.
7. $2x + 2y - x^2 - y^2 - 2 \leq 0 | :(-1) \quad x, y \in \mathbf{R}$,
 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0$,
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$.
Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych jest nieujemna, zatem nierówność jest zawsze prawdziwa.
9. Z założenia $y = 5 - x$, to $x^2 - (5 - x)^2 = 35$, to $x^2 - 25 + 10x - x^2 = 35$,
 $10x = 60 \Rightarrow x = 6, y = 1$, to $x \cdot y = -6$.

10. $x, y, z, k \in \mathbf{R}_+$.

Podnosząc wyrażenia po obu stronach do kwadratu otrzymamy

$(x+z)(y+k) \geq xy + 2\sqrt{xyzk} + zk$, po przekształceniach otrzymamy

$$xy + xk + zy + zk \geq xy + 2\sqrt{xyzk} + zk,$$

$xk + zy \geq 2\sqrt{xyzk}$, po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu mamy

$(xk)^2 + 2xyzk + (zy)^2 \geq 4xyzk$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia otrzymamy

$(xk - zy)^2 \geq 0$ – nierówność tożsamościowa.

11. D: $2xy(x+y) = (x^2 + y^2)(x+y) \Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - 2xy) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+y=0 \vee x^2 - 2xy + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = -y \vee (x-y)^2 = 0) \Leftrightarrow (x = -y \vee x = y).$$

12. D: $xy > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

nierówność tożsamościowa, dla $xy > 0$,

lub II metoda

Założenie: $xy > 0$,

$$\text{to } (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

13. D: Z założenia $xy > 0$, to $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = 2 + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\geq 2} \geq 4$.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

1. a) $x = -12$ jest rozwiązaniem równania;

b) 7, -7 nie są rozwiązaniem równania;

c) $x = \frac{3}{2}$ jest rozwiązaniem równania.

2. a) $x \in \{0, 4\}$; b) 0 nie należy do zbioru rozwiązań; c) $x \in \{0, 2\}$; d) -10.

3. a) Układ oznaczony. Rozwiązaniem jest para liczb (x, y) ; b) układ sprzeczny;

c) układ nieoznaczony. Ma nieskończenie wiele rozwiązań $\left(x; \frac{2}{5}x - \frac{7}{5}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

4. a) Np. $y = \frac{3}{7}x + 1$; b) np. $y = -\frac{3}{7}x + 12$; c) np. $y = -\frac{3}{7}x - 1$.

5. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -\frac{4}{13} \\ y = \frac{94}{13}. \end{cases}$

6. $x = 27$.

7. a) $x < -\frac{10}{3}$, $x \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right)$; b) $x < -12$, $x \in (-\infty; -12)$; c) $x \geq -\frac{9}{11}$, $x \in \left[-\frac{9}{11}; \infty\right)$;

d) $x > 2$, $x \in (2; \infty)$; e) $x \leq 2$, $x \in (-\infty; 2]$.

8. a) $x \in \left(-4; \frac{1}{3}\right)$ 5 liczb całkowitych; b) $x \in \left(2\frac{1}{5}; 2\frac{1}{4}\right)$ 0 liczb całkowitych.

9. a) $x \in \{0, 2\}$; b) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; c) $x \in \emptyset$; d) $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

e) $x \in \left[-\frac{10}{7}, \frac{10}{7}\right]$; f) $x \in \{-2, 2\}$; g) $x \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right\}$; h) $x \in \{-3\}$.

10. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$; b) $x \in (0; 3)$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) $x \in \left\langle -2; 2\frac{1}{2} \right\rangle$; e) $x \in \left(0; \frac{3}{5}\right)$;
 f) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$; g) $x = \frac{1}{2}$; h) $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$; i) $x \in \langle -4\sqrt{3}; 2\sqrt{3} \rangle$.

11. a) $x = -3$; b) $x = -5$.

12. a) $x \in \left\{-\frac{3}{2}\right\}$; b) $x \in \{-1\}$.

13. a) $x \in \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}$; b) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; c) $x \in \{-2, -\sqrt{3}, 2\}$; d) $x \in \{-2, 2\}$.

14. a) $x \in \{-4\}$; b) $x \in \{32\}$; c) $x \in \left\{\frac{11}{5}\right\}$; d) $x \in \left\{-\frac{3}{4}\right\}$; e) $x \in \emptyset$; f) $x \in \{-2(1+\sqrt{2})\}$;
 g) $x \in \{-6, 6\}$; h) $x \in \{-2, 3\}$; i) $x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$.

FUNKCJE

1. a) Zgodnie z definicją funkcji: każdemu argumentowi x jest przyporządkowana dokładnie jedna wartość y ;
 b) $y = 8$ dla $x = -2$ lub $x = 2$; c) zbiór wartości jest sześćoelementowy; d) $f(-2) = 8$.

2. $Z_w = \{-4996, -46, -4, 2, 4\}$.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -2\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2})$; b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

3. a) $f(x) = 2x^2 - 4, x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = 3x^2 + 7x, x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = -\frac{5}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; d) $f(x) = \frac{1}{x} + 7, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4. $f(x) = x - 4 \wedge x \in \mathbf{N} \wedge x < 11$.

5. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$,

$Z_{w_f} = \langle -4; 2 \rangle$,

funkcja stała w przedziałach:

$x \in (-\infty; -2), (4; \infty)$,

funkcja rosnąca w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$;

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

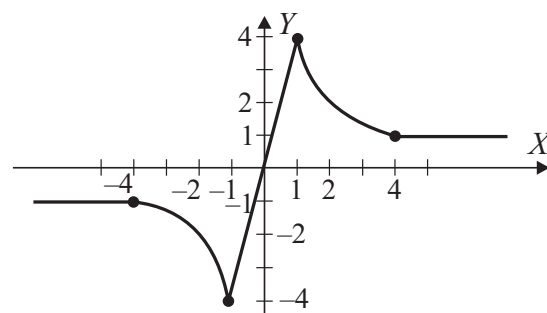
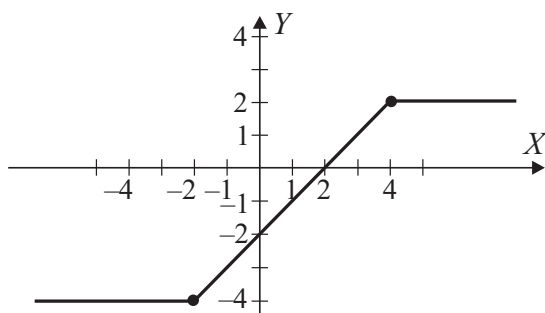
$Z_{w_f} = \langle -4; 4 \rangle$,

funkcja stała w przedziałach:

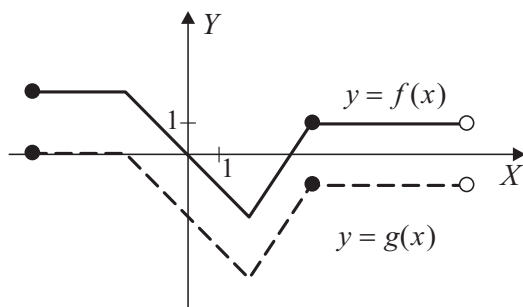
$x \in (-\infty; -4), (4; \infty)$, funkcja malejąca

w przedziałach: $\langle -4; -1 \rangle, \langle 1; 4 \rangle$,

funkcja rosnąca w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.



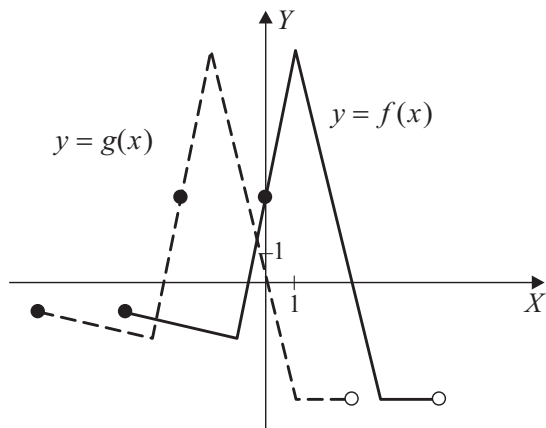
6. a)



b) $Z_{w_g} = \langle -4; 0 \rangle$;

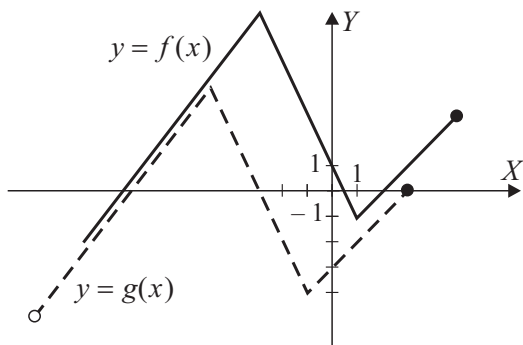
c) $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5; -2 \rangle$.

7.



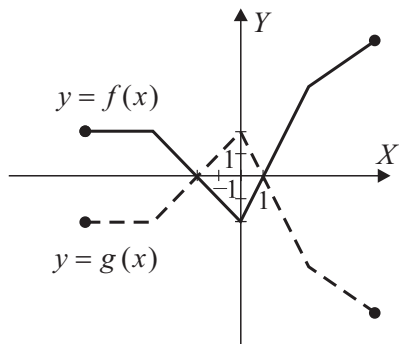
- a) $D_g = \langle -8; 3 \rangle$;
 b) $Z_{W_g} = \langle -4; 8 \rangle$;
 c) funkcja jest malejąca
 w przedziałach $\langle -8; -4 \rangle$, $\langle -2; 1 \rangle$;
 d) $f_{\max} = 8$;
 e) $\langle -8; -3 \rangle \cup \left(-\frac{3}{4}; 1 \right)$.

8. Wykres funkcji $y = g(x)$ otrzymamy z wykresu funkcji $y = f(x)$ w przesunięciu o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół.



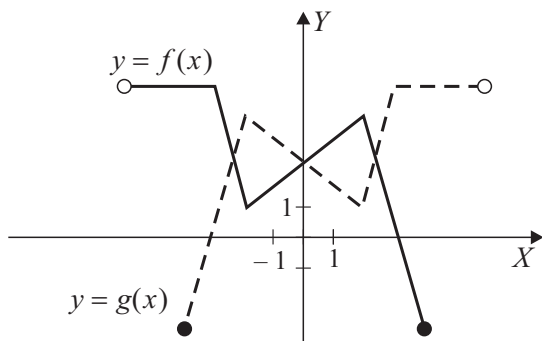
- a) $D_g = \langle -12; 3 \rangle$;
 b) $Z_{W_g} = \langle -5; 4 \rangle$;
 c) $g(0) = -3$;
 d) funkcja g jest rosnąca w przedziałach
 $\langle -12; -5 \rangle$, $\langle -1; 3 \rangle$, funkcja g jest malejąca
 w przedziale $\langle -5; -1 \rangle$.

9.



- a) $D_g = \langle -7; 6 \rangle$;
 b) $Z_{W_g} = \langle -6; 2 \rangle$;
 c) $g(0) = 2$;
 d) funkcja rosnąca w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$;
 e) $M = 2$, $m = -6$.

10.



- a) $D_g = \langle -4; 6 \rangle$;
 b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$;
 c) $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -4; -3 \rangle$;
 d) $g(-2) \cdot g(2) - g(4) + g(-3) = -1$.

11. a) $D_g = \langle -100; 2015 \rangle$, $Z_{W_g} = \langle -16; 8 \rangle$; b) $D_g = \langle -2015; 100 \rangle$, $Z_{W_g} = \langle -8; 16 \rangle$.

12. a) $D_g = \langle -1915; \infty \rangle$, $Z_{W_g} = \langle -8; 2016 \rangle$; b) $D_g = \langle -2015; \infty \rangle$, $Z_{W_g} = \langle 92; 2116 \rangle$;
 c) $D_g = \langle -2005; \infty \rangle$, $Z_{W_g} = \langle 12; 2036 \rangle$.

13. $f(x) = 2x + 10$.

14. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$.

15. $f(x) = -19x - 7$, $x = -\frac{7}{19}$.

16. $x = 16(\sqrt{7} + 2)$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 16(\sqrt{7} + 2) - 8\sqrt{7} = 16 \in N$.

17. $a < 4$, $b = 6$.

19. $y = -5x + 15$.

21. $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

23. a) $a < \frac{3}{2}$; b) $a = \frac{3}{2}$; c) $a = \frac{1}{4}$; d) $-5 \leq x \leq 2$.

24. $y = -x + 5$.

26. a) 240; b) $f(x) = 48x$, $x \in N$.

18. $y = -\frac{3}{4}x - 4$.

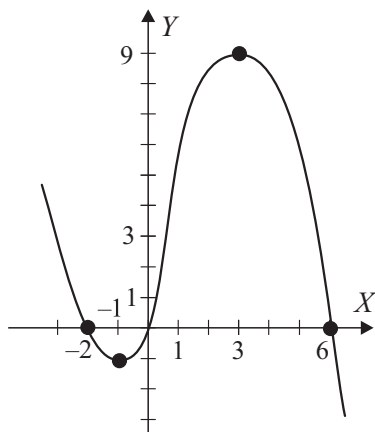
20. $A = (0, 4\sqrt{3})$, $B = (4, 0)$, $P_{\Delta} = 8\sqrt{3}$.

22. $f(x) = 5x - 7$.

25. a) $s = 14,5$ km; b) $t = 2,5$ h.

27. $f(x) = 18x$, $x \geq 0$, 32,40 zł.

28.



a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 6\}$;

b) funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty; -1)$; $\langle 3; \infty$);

c) $m = -1$, $M = 9$, m – najmniejsza wartość funkcji,
 M – największa wartość funkcji.

29. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 12$.

30. $f(x) = -4x^2 + 32x - 48$.

31. $Zw_f = \langle -80; \infty$), $x = -12$.

32. $k = 6$, $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 6; \infty$).

33. $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2$.

34. $\frac{f(\sqrt{3})}{f(\sqrt{7})} = \frac{a(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}{a(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)} = \frac{3-9}{7-9} = 3$.

35. a) $-\frac{3}{2} = \frac{-4+x_2}{2}$, $x_2 = 1$; b) $f(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{12}{5}$; c) $x = 0 \vee x = 5$.

36. $f(x) = -x^2 + 10x - 15$.

37. $p = \frac{x_1+x_2}{2} = -3$, $q = -4$, $f(x) = 4x^2 + 24x + 32$, $f(x) = 4(x+2)(x+4)$.

38. Np. $x \in \langle -1; 3$).

39. $P(x) = x^2 - 20x + 40$, $x \in (0; 20)$.

40. Równanie kwadratowe ma co najmniej jedno rozwiązanie, gdy $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = (m+k)^2 - 4(mk - p^2) = (m-k)^2 + 4p^2.$$

Dla dowolnego $m, k, p \in \mathbf{R}$, $\Delta \geq 0$, to równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

41. $b = -3$.

42. a) $b = 4 \vee b = -4$; b) $b = 5$.

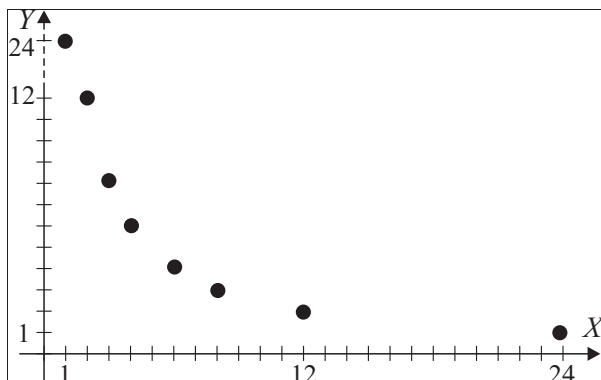
43. $P(x) = -x^2 + 8x + 240$, $x \in (0; 20)$; b) $P = 255$.

44. $x \cdot y = 36$, $x, y \in N_+$ lub $y = \frac{36}{x}$, $x, y \in N_+$.

x	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y	36	18	12	9	6	4	3	2	1

45. $x \cdot y = 24$, $x, y \in N_+$.

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1



46. a) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$; b) $x = 32$;

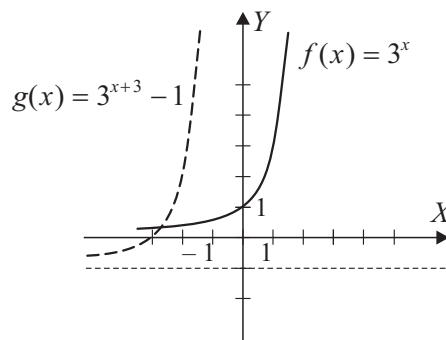
c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; \infty)$;

d) $f(2x+1) = f(x-4) \Leftrightarrow \frac{4}{2x+1} = \frac{4}{x-4} \Leftrightarrow x = -5$.

47. $f(x) = 3^x \xrightarrow{[-3, 1]} g(x) = 3^{x+3} + 1$,

$Z_{W_g} = (-1; \infty)$,

$g(0) = 26$, $P = (0, 26)$.

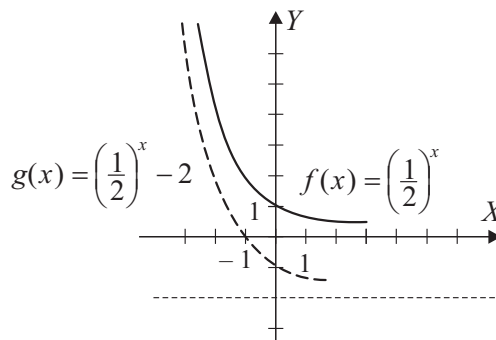


48. $Z_{W_f} = (0; \infty)$, $Z_{W_g} = (-2; \infty)$,

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{[0, -2]} g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$,

$P = (-4, 12)$ – nie należy do wykresu funkcji $g(x)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.



49. $f(4) = 819$.

50. a) $f(2) = 38400$ zł; b) Pan Kowalski korzysta 4 lata z samochodu.

CIĄGI

1. 7.

2. 9.

3. $n = 12$.

4. $a_{11} = 18$.

5. $a_{100} = 304$.

6. 0, 3, 6.

7. $a_{20} = 185$.

8. $a_1 = -1$, $S_{10} = -190$.

9. $a_n = 5n - 1$, $101 < 5n - 1 < 300$, $n = 40$.

10. 22500.

11. 70336.

12. 3960.

13. 100.

14. $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$.

15. $r = 30\frac{2}{9}$.

16. $n = 12$.

17. D: $S_n = 4n^2 + 6n$, $n \geq 1$,

$S_{n-1} = 4(n-1)^2 + 6(n-1) = 4n^2 - 2n - 2$,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 6n - (4n^2 - 2n - 2) = 8n + 2$,

$a_{10} + a_{11} = 82 + 90 = 172$.

18. $S_n = n - 3n^2$,

$$S_{n-1} = (n-1) - 3(n-1)^2 = n-1 - 3n^2 + 6n - 3 = -3n^2 + 7n - 4$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n - 3n^2) - (-3n^2 + 7n - 4) = n - 3n^2 + 3n^2 - 7n + 4 = -6n + 4,$$

$$a_n = -6n + 4$$

D: $a_n = -6n + 4$,

$$a_{n+1} = -6(n+1) + 4 = -6n - 2,$$

$$a_{n+1} - a_n = -6n - 2 - (-6n + 4) = 6n - 2 - 6n - 4 = -6 = r.$$

19. $x = -1$.

20. $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$.

21. $a_2 = -16\sqrt{7} - 12$,

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= \frac{6}{\sqrt{7}+3} + \frac{10}{\sqrt{7}-3} = \frac{6(\sqrt{7}-3) + 10(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)} = \frac{16\sqrt{7} + 12}{7-9} = \\ &= \frac{-16\sqrt{7} - 12}{2} = -8\sqrt{7} - 6, \end{aligned}$$

$$a_1 + a_3 \neq 2a_2.$$

22. $a_n = n^2 + n - 2$,

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 2 = n^2 + 2n + 1 + n - 1 = n^2 + 3n,$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 3n - n^2 - n + 2 = 2n + 2 \neq r,$$

(a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

23. $a_6 = \frac{3}{16}$.

24. $a_1 = 2$.

25. $q \neq 1 \wedge q \neq -1$

$$\begin{cases} a_1 q^6 - a_1 q^2 = 120 \\ a_1 q^6 - a_1 q^4 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 q^2 (q^4 - 1) = 120 \\ a_1 q^4 (q^2 - 1) = 96 \end{cases}$$

$$\frac{a_1 q^2 (q^2 - 1)(q^2 + 1)}{a_1 q^4 (q^2 - 1)} = \frac{120}{96}.$$

$$q^2 = 4$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} q = -2 \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

26. $\left(25, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}\right)$ lub $\left(-25, \frac{25}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

27. $a_2 = 5$.

28. $a_2^2 = 3$,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_3 &= \frac{4 + \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}} \cdot \frac{27}{23 + 8\sqrt{7}} = \frac{(4 + \sqrt{7})^2}{16 - 7} \cdot \frac{27(23 - 8\sqrt{7})}{(23 + 8\sqrt{7})(23 - 8\sqrt{7})} = \\ &= \frac{16 + 8\sqrt{7} + 7}{9} \cdot \frac{27(23 - 8\sqrt{7})}{529 - 448} = \frac{(23 + 8\sqrt{7})(23 - 8\sqrt{7}) \cdot 27}{9 \cdot 81} = \\ &= \frac{529 - 448}{27} = \frac{81}{27} = 3 = a_2^2. \end{aligned}$$

$$29. \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = -2 \end{cases}$$

$$S_8 = 1020 \text{ lub } S_8 = -340.$$

$$30. x = 1,9; (4,9; -2,1; 0,9).$$

$$31. S_5 = 279.$$

$$32. q = 2.$$

$$\text{Wskazówka: } q^{n-1} = 32,$$

$$-252 = \frac{-4(1 - q^{n-1} \cdot q)}{1 - q},$$

$$63(1 - q) = 1 - 32q,$$

$$q = 2.$$

$$33. n = 7.$$

$$34. x = 2, y = 8.$$

$$35. a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$$

(a, b, c) – są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to $2b = a + c \Rightarrow \frac{a+c}{2} = b$,

(a, b, c) – są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $d = \sqrt{ac}$.

Wyrazy a i c są równe, zatem należy porównać wyrazy b i d .

Z własności średniej arytmetycznej i geometrycznej wynika, że

$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$, zatem suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest większa bądź równa sumie wyrazów ciągu geometrycznego.

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \cdot 2,$$

$a+c \geq 2\sqrt{ac}$ podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymamy

$$a^2 + 2ac + c^2 \geq 4ac,$$

$$a^2 - 2ac + c^2 \geq 0,$$

$(a-c)^2 \geq 0$ nierówność tożsamościowa dla $a, c \in \mathbf{R}_+$.

$$36. \text{ W ciągu 10 dni.}$$

TRYGONOMETRIA

$$1. \text{ a) } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}; \text{ b) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}; \text{ d) } \sin \alpha = \frac{x}{z}, \cos \alpha = \frac{y}{z}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

$$2. \text{ a) } h = 4\frac{1}{2}; \text{ b) } h = \frac{8\sqrt{3}}{3}; \text{ c) } h = 12\sqrt{2}; \text{ d) } h = 6.$$

$$3. \text{ a) } y = 18,668, x = 14,3; \text{ b) } y = 6,18, x = 19,02; \text{ c) } x = 42,59, y = 38,601; \\ \text{d) } x = 29,38, y = 24,61.$$

$$4. \text{ a) } -1; \text{ b) } \frac{9+2\sqrt{2}}{3}; \text{ c) } -\frac{41}{36}.$$

$$5. \text{ a) } \frac{3}{4}; \text{ b) } -\frac{1}{2}; \text{ c) } \frac{9}{4}; \text{ d) } \frac{1}{4}.$$

$$6. -\frac{1}{2}.$$

$$7. 3\sqrt{5}.$$

$$8. \frac{2}{9}.$$

$$9. L = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sqrt{9^{\cos 60^\circ}} - 4^{\sin 30^\circ} = \sqrt{3} \left[(3^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} - (2^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2 = 3 - 2 = 1 = P.$$

$$10. \sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$11. 2 \sin \alpha; \cos \alpha; \sin \alpha.$$

$$12. \text{Tak; tak.}$$

$$13. L = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \neq P.$$

$$14. \text{a) } L = 12(\sqrt{3} + 1); \text{ b) } L = 12(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1); \text{ c) } L = 18(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

$$15. \text{a) } L = 4(6 + \sqrt{3} + \sqrt{2}), P = 8(4 + \sqrt{3}); \text{ b) } L = 6(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}), P = 18(\sqrt{3} + 2);$$

$$\text{c) } L = 12(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}), P = 36(\sqrt{3} + 1); \text{ d) } L = 30 + 6\sqrt{3}, P = 36\sqrt{3}.$$

$$16. 1.$$

$$17. d = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

$$18. d = 2\sqrt{3}.$$

$$19. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}.$$

$$20. 12, 16.$$

$$21. L = 4(\sqrt{15} + 1), P = 4\sqrt{15}.$$

$$22. \begin{cases} P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4a \sin \alpha = 2a^2 \sin \alpha \\ P_{\Delta} = a^3 \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$2a^2 \sin \alpha = a^3 \sqrt{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

$$\frac{h}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}a.$$

$$23. P = 144 \text{ cm}^2.$$

$$24. \text{a) } |MN| = 19,2 \text{ cm; b) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$25. \text{a) } h = 19,2 \text{ cm; b) } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$26. P = 648 \text{ cm}^2, L = 144 \text{ cm}.$$

$$27. f(x) = \sqrt{3}x + 1. \quad \text{a) } \alpha = 60^\circ; \quad \text{b) } A = (0, 1), B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right); \quad \text{c) } P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad \text{d) } L_{\Delta} = \sqrt{3} + 1.$$

$$28. \text{a) } 1\frac{5}{6}; \quad \text{b) } |CD| = 2\sqrt{17}.$$

$$29. x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, a = -1, b = 0, c = 2. \quad 30. P = 24, h = 4.$$

$$31. \left. \begin{array}{l} P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin \alpha = 27 \sin \alpha \\ x \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow 0 < \sin \alpha \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{\Delta} \leq 27.$$

$$32. \alpha = 30^\circ.$$

$$33. \alpha = 120^\circ.$$

$$34. L = 50 \text{ cm}.$$

PLANIMETRIA

$$1. \text{a) } \alpha = 30^\circ, 2\alpha = 60^\circ; \text{ b) } \alpha = 80^\circ, 2\alpha = 160^\circ; \text{ c) } \alpha = 126^\circ, 2\alpha = 252^\circ.$$

2. $|\angle ECD| = |\angle EBD|$,
 $|\angle BCA| = |\angle BDA|$,
 $|\angle CEB| = |\angle CAB|$,
 $|\angle ACE| + |\angle EBD| + |\angle DAC| + |\angle CEB| + |\angle BDA| =$
 $= |\angle ACE| + |\angle ECD| + |\angle DAC| + |\angle CAB| + |\angle BCA| =$
 $= |\angle BCD| + |\angle DAB| = 180^\circ - |\angle DAB| + |\angle DAB| = 180^\circ.$
3. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ.$
4. a) $\alpha = 300^\circ$, $\beta = 30^\circ$; b) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 20^\circ$; c) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 40^\circ$; d) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ.$
5. $\alpha = |A_1OA_2| = |A_2OA_3| = |A_3OA_4| = |A_4OA_5| = |A_5OA_6| = |A_6OA_7| = |A_7OA_8| = |A_8OA_1|$,
 $8\alpha = 360^\circ$,
 $\alpha = 45^\circ$,
 $|A_1A_6B| = |A_1A_6A_3| = |A_1A_4A_3| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$,
 $|A_6A_1B| = |A_6A_1A_3| = |A_6A_3A_4| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$,
 $|A_1BA_6| = 180^\circ - |A_1A_6B| - |A_6A_1B| = 180 - 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \Delta A_1BA_6$ jest prostokątny.
6. Z kątów wpisanych $|\angle ACB| = \frac{1}{2}|\angle AOB| = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$,
analogicznie $|\angle CBD| = |\angle BDA| = |\angle DAC| = 90^\circ \Rightarrow$ czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.
7. $|\angle DBA| = 90^\circ - \alpha$,
 $|\angle ACD| = 180^\circ - |\angle DBA| = \alpha - 90^\circ$,
 $|\angle ACD| - |\angle CDA| = |\alpha - 90^\circ - \alpha| = 90^\circ.$
8. $|\angle KLA| = \frac{1}{2}|\angle KOA| = 90^\circ$,
 $|\angle KLB| = \frac{1}{2}|\angle KOB| = 90^\circ$,
 $|\angle ALB| = |\angle KLA| + |\angle KLB| = 180^\circ \Rightarrow$ punkty A, L, B są współliniowe.
9. a) $r_1 = 6$, $r_2 = 2$; b) $|S_1P| = 12.$
10. $|\angle KLP| = 90^\circ - \beta$
 $|\angle LPS_2| = |\angle PLS_2| = \beta \Rightarrow |\angle LS_2P| = 180^\circ - 2\beta$, $|\angle LKP| = 90^\circ - \alpha$, $|\angle KPS_1| = |\angle PKS_1| = \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\angle KSP| = 180^\circ - 2\alpha$
 $|\angle S_1KL| + |\angle KLS_2| + |\angle LS_2S_1| + |\angle S_2S_1K| = 360^\circ$
 $180^\circ - 2\alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \beta + 180^\circ - 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$
 $|\angle KPL| = 180^\circ - |\angle PKL| - |\angle PLK| = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - 90^\circ + \beta = \alpha + \beta = 90^\circ.$
11. $L = 12\sqrt{2} + 16$ cm.
12. a) Tak, bo ma boki tej samej długości;
b) nie, bo bok o długości 6 leży między kątami różnej miary;
c) tak, bo boki o tej samej długości leżą między kątami jednakowej miary;
d) nie, bo boki trójkątów mają różne miary.
13. $\left. \begin{array}{l} |\angle EAB| = |\angle DBA| \\ |\angle EBA| = 90^\circ - |\angle EAB| = 90^\circ - |\angle DBA| = |\angle DAB| \\ |AB| \text{ wspólny bok} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k b k \\ \Rightarrow \Delta ABE \equiv \Delta DBA \Rightarrow |BE| = |AD|. \end{array}$
14. $\left. \begin{array}{l} |\angle MKL| = |\angle CBA| = 2\alpha \\ |\angle ACB| = 180^\circ - 90^\circ - |\angle CBA| = 90^\circ - |\angle MKL| = |\angle MLK| \\ |CB| = |KL| \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta MKL \stackrel{k, b, k}{\equiv} \Delta KLM.$

15. a) $c(b, k, b)$; b) $c(k, k, k)$; c) $c(k, k, k)$; d) $c(k, k, k)$; e) $c(k, k, k)$; f) $c(k, k, k)$.

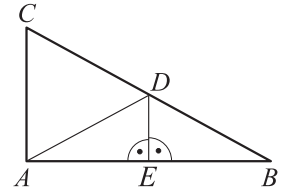
16. $\triangle ADB \stackrel{k,k,k}{\sim} \triangle ACE \Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$,

$$|AE| = \frac{1}{2}|AB|,$$

$$|AB|^2 = 2|AC| \cdot |AD|.$$

17. a) $DE \perp AB \Rightarrow DE \parallel AC \stackrel{z \text{ tw. Talesa}}{\Rightarrow} \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{|BE|}{|AB|} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} |BE| = \frac{1}{2}|AB| \\ \Rightarrow |ED| \text{ wspólny bok} \\ |\angle AED| = |\angle DEB| = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \equiv \triangle DEB;$$



b) $|AC| = 12 \text{ cm}$, $|BC| = 20 \text{ cm}$, $|AB| = 16 \text{ cm}$.

18. a) $L = 25,2 \text{ cm}$; b) $R = 5,3 \text{ cm}$; c) $r = 2 \text{ cm}$; d) $d = \frac{53}{15} \text{ cm}$; e) $\sin \alpha = \frac{28}{53}$; f) $h = \frac{252}{53} \text{ cm}$.

19. $r = \frac{16}{3}$.

20. $\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta = 4$.

21. a) $d = 8 \text{ cm}$; b) $P = 192 \text{ cm}^2$; c) $\frac{P_{ko}}{P_{kw}} = \frac{625}{64}$.

22. $L = 28,8 \text{ cm}$, $P = 34,56 \text{ cm}^2$.

23. $P_\Delta = 48\sqrt{7} \text{ cm}^2$, $P_k = \frac{144}{7} \pi \text{ cm}^2$.

24. $P = 20 [j^2]$. Z własności wysokości poprowadzonej z kąta prostego w trójkącie prostokątnym wynika:

$$\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ 16 + x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, & y = 8, \end{cases}$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20.$$

25. $P = 39 \text{ cm}^2$, $L = 5\sqrt{3} + 13 \text{ cm}$.

26. $\alpha = 30^\circ$.

27. $|AB| = |AC| = 0,4\sqrt{5} \cdot m$, $|BC| = 0,4\sqrt{10} \cdot m$.

28. $L = 2a(\sqrt{2} + 1)$.

29. $r = 3(2 - \sqrt{2})$.

30. $\triangle BDE \stackrel{k,k,k}{\sim} \triangle ACB$

$$|EB| = b - x, \quad \frac{|DE|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\frac{x}{b-x} = \frac{a}{b}, \quad bx = a(b-x), \quad x(a+b) = ab, \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

31. $|AB|^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4x^2 + 4y^2$

$$\left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2 = (2x)^2 + y^2$$

$$\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2 = x^2 + (2y)^2$$

$$\frac{1}{4}(|AC|^2 + |BC|^2) = 5x^2 + 5y^2 \quad / \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5}(|AC|^2 + |BC|^2) = 4x^2 + 4y^2 = |AB|^2.$$

32. $|\angle BAP| = |\angle DAP| = \alpha,$

$DP \parallel AB \Rightarrow |\angle DPA| = |\angle PAB| = \alpha \Rightarrow \Delta DAB$ jest równoramienny $\Rightarrow |DP| = |AD|,$

analogicznie $|EP| = |EB|,$

$|DE| = |DP| + |PE| = |AD| + |BE|.$

33. $L = 36\sqrt{3}$ cm.

34. $|ES| = |DS| \Rightarrow \Delta DES$ jest równoramienny,

$|\angle EBD| = |\angle SBD| = |\angle EBA| = 30^\circ,$

$|\angle DSB| = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$

$|\angle ESD| = 180^\circ - |\angle DSB| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$

$$\begin{cases} |\angle BED| = |\angle EDS| = |\angle SED| = \frac{180^\circ - |\angle ESD|}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = |\angle SBD| \Rightarrow \\ |\angle EDB| = 180^\circ - |\angle EBD| - |\angle BED| = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ - |\angle ESD| \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta EDS \stackrel{k,k,k}{\sim} \Delta EDB.$

35. $|\angle DBA| + |\angle BDA| + |\angle BAD| = 120^\circ, \quad 2\alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ,$

$|\angle ACD| = 180^\circ - |\angle CDA| - |\angle CAD| = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = 2\alpha = |\angle CBA| = |\angle BAC| \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC$ jest równoboczny.

36. $|AE| = \frac{4\sqrt{34}}{7}$ cm, $|ES| = \frac{4\sqrt{15}}{7}$ cm.

37. $L = 48$ cm, $P = 64\sqrt{3}$ cm².

38. $P_{ABCD} = 96$ cm², $P_{A_1B_1C_1D_1} = 54$ cm².

39. $P = 72(\sqrt{3} - 1)$ cm².

40. $P = 80$ cm².

41. $P = 108$ cm².

42. $P_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h,$

$P_{\Delta CAB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = P_{\Delta ADB},$

$P_{\Delta DPA} = P_{\Delta DBA} - P_{\Delta PAB},$

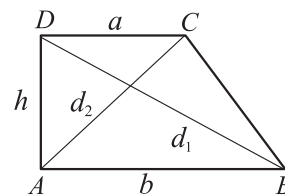
$P_{\Delta CBP} = P_{\Delta CAB} - P_{\Delta PAB} = P_{\Delta DBA} - P_{\Delta PAB} = P_{\Delta DPA}.$

43. Z tw. Pitagorasa

$d_2^2 = b^2 + h^2,$

$d_1^2 = a^2 + h^2,$

$d_2^2 - d_1^2 = b^2 + h^2 - a^2 - h^2 = b^2 - a^2.$

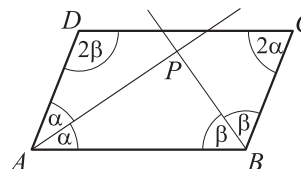


44. $L = 4\sqrt{117}$ cm, $P = 108$ cm².

45. $2\alpha + 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

$|\angle APB| + |\angle PAB| + |\angle PBA| = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow |\angle APB| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$



46. $L = 48$ cm.

47. $P = 108\sqrt{3}$.

48. $\sin \alpha = 0,96.$

49. $|KL| = |MN| = |LM| = |NK| = 14$ cm.

50. $\frac{P_r}{P_k} = \frac{8}{\pi}.$

GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

1. a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 30^\circ$; c) $\alpha = 120^\circ$; d) $\alpha = 135^\circ$.
2. b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 + \sqrt{3}$; b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6 + \sqrt{3}$.
3. a) $y = x + 3$ lub $-x + y - 3 = 0$; b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{26}{6}$ lub $x - 6y - 26 = 0$.
4. a) $|AB| = 10$, $S_{AB} = (-6, 13)$; b) $|AB| = 13$, $S_{AB} = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$.
5. a) Np. $y = \sqrt{5}x + 1$, $y = \sqrt{5}x - 100$, $y = \sqrt{5}x - \sqrt{2}$;
b) np. $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + 5$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + 1$.
6. a) $y = -3x + 16$; b) $y = -3x - 6$; c) $y = -3x + 1 + 3\pi$.
7. a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; c) $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{7}$.
8. $y = 3x - 6$. 9. 1. 10. a) $m = -18$; b) $m = -1$.
11. $a = \frac{1}{2}$. 12. $p = 7$. 13. $p = \frac{5}{4}$.
14. $y = -6x + 8$. 15. $n = -\frac{5}{2}$, $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ lub $n = -\frac{5}{2}$, $m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
16. $y = \frac{6}{5}x + 6$. 17. k : $y = -\frac{1}{2}x - 2$.
18. $y = -2x + 12$. 19. $|BD| = 2\sqrt{5}$. 20. $y = -5x - 2$.
21. $y = 2$. 22. $S = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.
23. a) $P = 4\sqrt{3}$; b) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
24. a) Trójkąt jest prostokątny; b) $P = 24 [j^2]$. 25. $y = \frac{1}{4}x$.
26. a) $D = (0, 2)$;
b) równoległobok $ABCD$ jest rombem, bo długości boków są równe $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = \sqrt{10}$.
27. Proste są równoległe i różne, to nie mają punktów wspólnych.
 $m \parallel k \Leftrightarrow a = 6$, $l \perp m \Leftrightarrow a = -\frac{8}{3}$.
28. a) $y = x - 4$; b) $y = -x + 4$; c) $C = (2, 2) \vee C = (6, -2)$.
29. $C = (12, 0)$ lub $C = (-6, 6\sqrt{3})$.
30. $A = (-2, -8)$, $B = (6, 4)$, $C = (-2, 4)$.
31. $B = (4, 6)$, $D = (-3, 8; 5, 6)$.
32. a) $P' = (-2, 8)$; b) $P' = (2, -8)$; c) $P' = (2, 8)$.
33. a) $A' = (-2, 1)$, $B' = (1, -3)$, $C' = (2, 3)$;
b) $A' = (2, -1)$, $B' = (-1, 3)$, $C' = (-2, -3)$;
c) $A' = (2, 1)$, $B' = (-1, -3)$, $C' = (-2, 3)$.

34. $A' = (-10, -12), B' = (-40, -64)$.

35. a) $y = 2x - 4$; b) $y = 2x + 4$; c) $y = -2x - 4$.

36. $y = 0, x = 0, y = x, y = -x$.

37. $A' = (-10, 0)$.

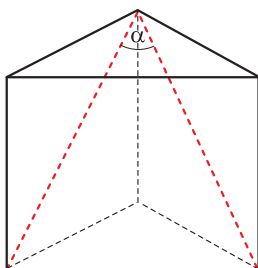
38. $A = (28, -10)$.

STEREOMETRIA

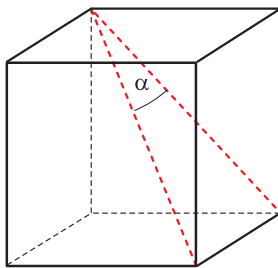
1. a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$; c) $\alpha = 60^\circ$.

2. a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$; c) $\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \alpha \approx 75^\circ$; d) $\alpha \approx 78^\circ$; e) $\alpha \approx 82^\circ$; f) $\alpha \approx 19^\circ$.

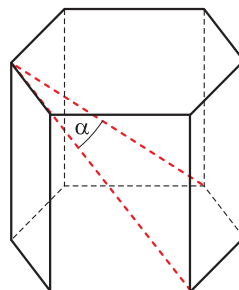
3. a)



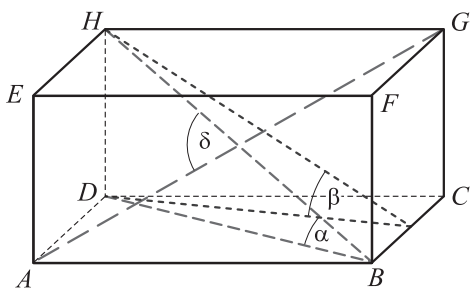
b)



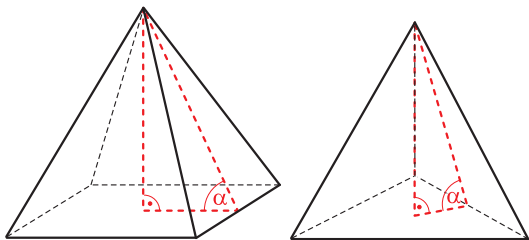
c)



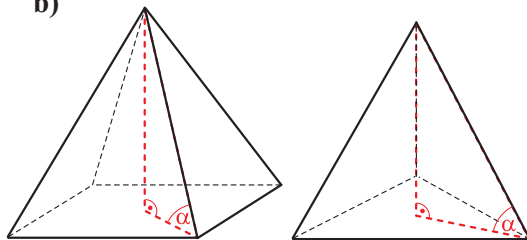
4. a) kat α ;
b) kat β ;
d) kat δ .



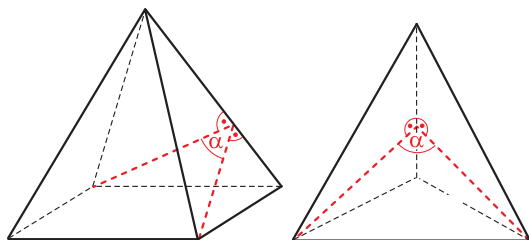
5. a)



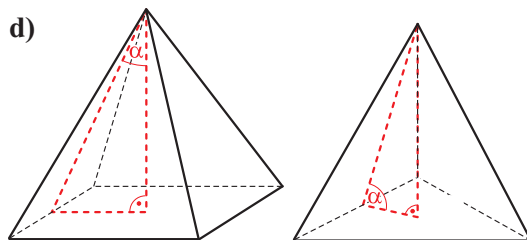
b)



c)



d)



6. a) $x = 2\sqrt{57}$; b) $x = 3\sqrt{19}$; c) $x = 12\sqrt{2}$.

7. a) $x = 4\sqrt{3}$; b) $x = 4\sqrt{15}$; c) $x = 6\sqrt{3}$.

8.

Granistosłupy				
Liczba ścian	11	12	10	$\frac{n}{2} + 2$
Liczba krawędzi	27	30	24	$\frac{3}{2}n$
Liczba wierzchołków	18	20	16	n

Ostrosłupy				
Liczba ścian	11	12	12	n
Liczba krawędzi	22	24	24	$2n$
Liczba wierzchołków	11	12	12	n

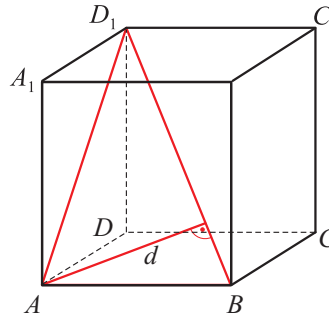
9. $d = a\sqrt{3}$.

10. $\alpha = 60^\circ$.

11. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{125}{1}$.

12. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **b)** $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

c) Wskazówka: $\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot d$, $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



13. a) $P = 16(15 + 2\sqrt{3})$, $V = 160\sqrt{3}$; **b)** $P_c = 36(3\sqrt{3} + 10)$, $V = 540\sqrt{3}$;

c) $P_c = 48(1 + 2\sqrt{6})$, $V = 288$.

14. a) $V = 18\sqrt{11}$, $P_c = 9(\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$; **b)** $V = 288\sqrt{14}$, $P_c = 144(1 + \sqrt{15})$;

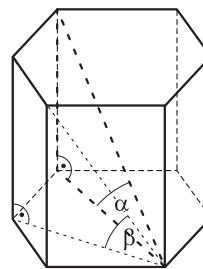
c) $V = 324$, $P_c = 54(\sqrt{15} + \sqrt{3})$.

15. $a = 8$, $b = 10 \vee a = 9\frac{1}{3}$, $b = 7\frac{1}{3}$.

16. $V = \frac{46137}{128}$, $P_c = \frac{507\sqrt{14}}{8} + \frac{1183}{16}$.

17. $P_c = 72 \text{ cm}^2$, $V = 32 \text{ cm}^3$, $\text{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$.

18. $\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.



19. $H = 12\sqrt{11}$.

20. $V = 1228,8$.

21. $\text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. $h \approx 25,5$, $V \approx 3672\sqrt{3}$, $P_c = 288\sqrt{3} + 1836$.

23. $V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $P_c = 72(4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

24. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5365}}{74}$.

25. $V = a^3$.

26. $P_c = 304 \text{ cm}^2$.

27. $\text{tg} \alpha = \frac{15\sqrt{34}}{17}$.

$$28. \cos^2 \alpha = \left(\frac{|BD|}{d} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{d^2},$$

$$\cos^2 \beta = \left(\frac{|A_1D_1|}{d} \right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{d^2},$$

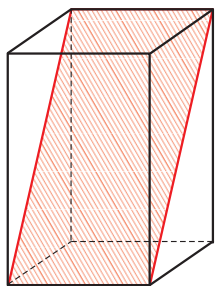
$$\cos^2 \gamma = \left(\frac{|BC|}{d} \right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{d^2},$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a^2 + b^2}{d^2} + \frac{a^2 + c^2}{d^2} + \frac{b^2 + c^2}{d^2} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{d^2} = \frac{2d^2}{d^2} = 2.$$

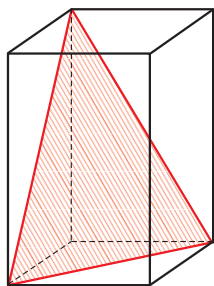
$$29. V = 1120\sqrt{39}.$$

$$30. V = 64\sqrt{6}, P_c = 16(\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}).$$

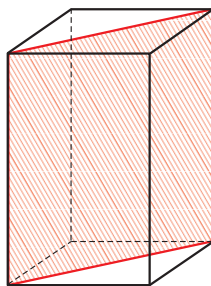
31. a)



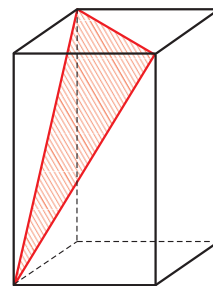
b)



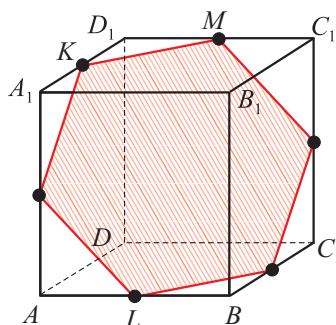
c)



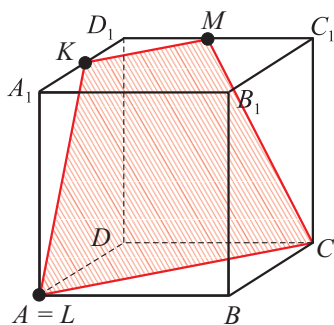
d)



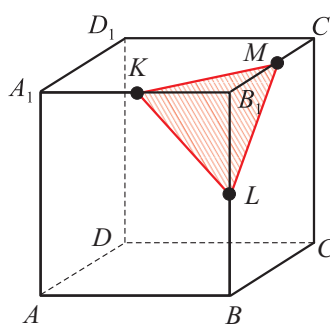
32. a)



b)



c)



$$33. \text{ a) } P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \quad \text{ b) } P = \frac{a^2}{2}; \quad \text{ c) } P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$34. a = 12, V = 1728 \text{ cm}^3, P_c = 864 \text{ cm}^2, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 35. x \approx 11,4, h \approx 15,4, P \approx 140.$$

$$36. \text{ a) } V = 720 \text{ cm}^3; \quad \text{ b) } \triangle BA_1C_1 \text{ jest prostokątny, } P_\Delta = 72\sqrt{30}, V = \frac{1}{3} 72\sqrt{30} \cdot d.$$

$$37. V = 144\sqrt{3}, P_b = 72\sqrt{7}.$$

$$38. \text{ a) } P_b = 16\sqrt{3}; \quad \text{ b) } V = \frac{32\sqrt{3}}{3}; \quad \text{ c) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$39. V = 4608 \text{ cm}^3, P_c = 288 + 192\sqrt{41} \text{ cm}^2.$$

$$40. \sin \alpha = \frac{\sqrt{137}}{12}.$$

$$41. V = 400 \text{ cm}^3, P_c = 340 \text{ cm}^2.$$

$$42. P_b = a^2 \left(16\sqrt{2} + \frac{\sqrt{243}}{2} \right), \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{127}{143}}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{254}}{8}.$$

$$43. H = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad P_b = \frac{a^2}{\cos \alpha}.$$

$$44. P_b = \frac{1}{2}a^2(1 + \sqrt{5}), \quad V = \frac{1}{6}a^3, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$45. V = \frac{35\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot a^3}{6}.$$

$$46. |AB| = 10, \quad |BC| = 6, \quad V = \frac{20\sqrt{102}}{3}, \quad S = 32 + \frac{8\sqrt{102}}{3}.$$

$$47. \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}.$$

$$49. V = \frac{162\sqrt{21}}{7}.$$

$$50. P_b = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$51. \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}.$$

$$52. \text{a) } P_b = 192 + 12\sqrt{91}; \quad \text{b) } \cos \alpha = \frac{3\sqrt{273}}{91}.$$

$$53. \text{a) } P_b = 288 + 96\sqrt{3}; \quad \text{b) } S = 36\sqrt{3} + 8\sqrt{39}.$$

$$54. \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$55. V = \frac{1}{6}x^3.$$

$$56. V = \frac{a^3}{8}, \quad P_c = \frac{a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{15}}{2}.$$

$$57. P = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

FIGURY OBROTOWE

$$1. \text{ a) } V = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3}, \quad P_c = 75\pi; \quad \text{b) } V = 72\sqrt{3}\pi, \quad P_c = 108\pi;$$

$$\text{c) } V = \frac{1024\sqrt{2}\pi}{3}, \quad P_c = 128\pi + 128\sqrt{2}\pi;$$

$$\text{d) } V = \frac{1}{3}\pi l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad P_c = \pi l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right).$$

$$2. \alpha = 60^\circ.$$

$$3. P_b = 24\pi.$$

$$4. V = \frac{729\pi}{8}.$$

$$5. V = 72\pi \text{ cm}^3, \quad P_c = 36\pi + 36\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2.$$

$$6. P_b = 27\pi, \quad V = \frac{81\sqrt{7}\pi}{8}, \quad \sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{12}.$$

$$7. r_1 = \frac{P_I}{\pi \cdot R}, \quad r_2 = \frac{P_{II}}{\pi \cdot R},$$

$$r_1 + r_2 = \frac{P_I}{\pi \cdot R} + \frac{P_{II}}{\pi \cdot R},$$

$$r_1 + r_2 = \frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot R},$$

$$r_1 + r_2 = R.$$

$$8. V = \frac{35a^3\pi}{3}.$$

$$9. V_1 = \frac{1}{3}\pi b^2 a,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 b,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi b^2 a}{\frac{1}{3}\pi a^2 b},$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a}.$$

10. a) $V = \frac{a^3\pi}{4}$, $P_c = \frac{3}{2}a^2\pi$; b) $V = 2\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha$, $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 \operatorname{tg}\alpha$;

c) $2\pi r = h$, $r = \frac{h}{2\pi}$, $V = \frac{h^3}{4\pi}$, $P_c = h^2 + \frac{h^2}{2\pi}$.

11. $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

12. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{P_{c_1}}{P_{c_2}} = \frac{1}{2}$.

13. $V_1 = \pi h^2 r$,

$V_2 = \pi r^2 h$,

$V_1 = V_2$,

$\pi h^2 r = \pi r^2 h$,

$h = r \Rightarrow$ prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

14. $P_{c_1} = 2a^2\pi + 2\pi ab$,

$P_{c_2} = 2b^2\pi + 2\pi ab$,

$P_{c_1} = P_{c_2}$,

$2a^2\pi + 2\pi ab = 2b^2\pi + 2\pi ab$,

$2a^2\pi = 2b^2\pi \Rightarrow a = b \Rightarrow$ dany prostokąt jest kwadratem.

15. $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 10$ cm.

16. a) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{1}$; b) $\frac{P_{c_1}}{P_{c_2}} = \frac{25}{1}$.

17. $\Delta h = \frac{8}{27}$ cm.

ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

1. $x = 1$, $M_e = 5$.

2. a) $x = 8$; b) $M_e = 4$.

3. 9.

4. 1,85.

5. a) 1,3; b) 1; c) $\frac{496}{1785}$.

6. Obóz piłkarski lub obóz tenisowy.

	Koszt waga (0,5)	Termin waga (0,2)	Atrakcyjność waga (0,1)	Towarzystwo waga (0,3)	Średnia ważona
Obóz piłkarski	7	5	8	4	5,9
Obóz żeglarski	5	4	7	5	5
Obóz rowerowy	6	4	2	3	4,5
Obóz tenisowy	8	2	3	6	5,9

7.

Wynik procentowy ucznia	0–29%	30–39%	40–49%	50–69%	70–79%	80–100%	Suma
Procent uczniów	20%	5	15	30	20	10	–
Liczba uczniów	24	6	18	36	24	12	120

a) 96; b) 0,36.

8. a) 3058; b) 3000; c) 0,83.

9. 100,1.

10. Średnia 1,35, $M_e = 1$.

11. 3, 6, 12.

12. a) 8; b) 1,1.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

1. a) 6; b) 5.
2. 24.
3. 5 · 5 · 4.
4. 40 · 39 · 38 · 37.
5. 10⁵.
6. 100 · 99 · 98.
7. 2⁷.
8. 9 · 8 = 72.
9. 9 · 9 · 8 · 7 = 4536.
10. 3 · 10² = 300.
11. 9 · 5 · 5 = 225.
12. 9 · 8 · 7 + 8 · 8 · 7 · 4.
13. 6 · 5 = 30.
14. 4 · 1 + 6 · 2 = 16.
15. 16 · 10 · 8 = 1280.
16. a) 9; b) 21.
17. a) 16; b) 20.
18. a) 5 · 7 · 4; b) 5 · 7; c) 5 · 4.
19. 8 · 10 · 12 = 960.
20. a) 5 · 4 · 3 · 2 · 1; b) 4 · 3 · 2 · 1 · 2.
21. a) 11!; b) 6! · 5!.
22. a) 12!; b) 6! · 6!; c) 2 · 6! · 6!.
23. a) 10⁴; b) 3⁴.
24. a) 2 · 6 · 5!; b) 2! · 3! · 2.
25. 7.
26. 9 · 7 = 63.
27. 3 · 2 · 7² + 2 · 7² = 392.
28. 54.
29. 3 · 9 + 3 = 30.
30. 4 · 4 · 3 · 2 · 1 · 2 = 192.
31. 4 · 5 · 5 · 5 · 5 = 4 · 5⁴ = 2500.
32. 4 · 4 · 5 · 4 · 3 = 960.
33. 9 · 10 · 5 - 8 · 9 · 5 = 90.
34. 3 · 4 = 12.
35. 5 · 4 · 10 · 10 · 5 · 30 + 5 · 4 · 10 · 10 · 5 · 10 · 10 · 10.
36. a) 4 · 3 · 2 · 4 = 96; b) 4 · 3 · 2 · 3 = 72.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{4}{8}$; c) $\frac{4}{8}$.
2. a) $P(A) = \frac{9}{64}$; b) $P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{64}$.
3. a) $P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$, $P(A) = \frac{3}{28}$; b) $P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56}$, $P(B) = \frac{15}{28}$.
4. $P(A) = \frac{85}{323}$.
5. Wszyscy mają jednakową szansę $P(A) = 0,2$.
6. $P(A) = \frac{59}{490}$.
7. $P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{9}$.
8. $P(A) = \frac{15}{92}$.
9. $P(A) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$.
10. $P(A) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.
11. $P(A) = 0,4$.
12. $P(A) = \frac{7}{45}$.
13. $P(A) = \frac{1}{4}$.
14. $P(A) = \frac{5}{201}$.
15. a) $P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{9}$; b) $P(B) = \frac{14}{504}$; c) $P(C) = \frac{436}{504}$.
16. a) $P(A) = \frac{5040}{9999}$; b) $P(B) = \frac{486}{9999}$.
17. $P(A) = \frac{32}{81}$.
18. $P(A) = \frac{1}{6}$.

19. a) $P(A) = \frac{1}{12}$; b) $P(B) = \frac{1}{9}$.

20. a) $P(A) = \frac{1}{4}$; b) $P(B) = \frac{1}{6}$.

21. $\bar{\Omega} = 6^3$, $\bar{A} = 4$, $P(A) = \frac{4}{6^3}$.

22. $\bar{\Omega} = 6^3$, $\bar{A} = 6$, $P(A) = \frac{1}{6^2}$.

23. $\bar{\Omega} = 6^5$, $\bar{A} = 6$, $P(A) = \frac{1}{6^4}$.

24. a) $P(A) = \frac{54}{125}$; b) $P(B) = \frac{27}{125}$.

25. $P(A) = \frac{3}{5}$.

26. $P(A) = 0,756$.

UDOWODNIJ, ŻE ...

1. $a = 10^3(1+10+100) = 111 \cdot 10^3 = 111\,000 = 3 \cdot 37\,000$. Liczba podzielna przez 3.

3. $(3n+2)^2 - (3n+1)^2 = 9n^2 + 12n + 4 - 9n^2 - 6n - 1 = 6n + 3 = 3(2n+1) = 3k$, $k \in \mathbf{C}$.

4. $(x-y)(x+y) = 49$, $7(x-y) = 49 \Rightarrow x-y = 7 \wedge x+y = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = 0$.

5. $x^2 + (16-x)^2 = x^2 + 256 - 32x^2 + x^2 = 2x^2 - 32x + 256 = 2[(x-6)^2 + 64] = 2(x-6)^2 + 128$,
dla każdego $x \in \mathbf{R}$ wyrażenie $2(x-6)^2 \geq 0$, zatem $2(x-6)^2 + 128 \geq 128$.

6. $a = (7^4)^2 - (5^4)^2 = (7^4 - 5^4)(7^4 + 5^4) = (7^2 - 5^2)(7^2 + 5^2)(7^4 + 5^4) = 2 \cdot 12 \cdot (7^2 + 5^2)(7^4 + 5^4) = 2k$, $k \in \mathbf{N}$.

7. Z warunków zadania wynika, że $|BE| = |BD| = a$ i $|AD| = |AH| = a$

$$|\angle DBE| = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$$

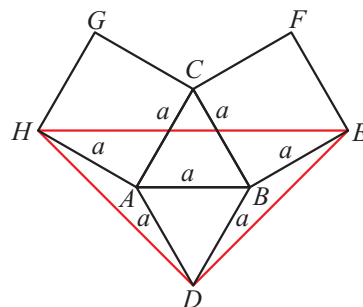
$$|\angle DAH| = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 150^\circ.$$

Zatem $\triangle DBE$ jest przystający do $\triangle DAH$, więc $|DE| = |DH|$.

$$|\angle BDE| = |\angle ADH| = 15^\circ$$

$$|\angle HDE| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

wobec tego $\triangle HDE$ jest prostokątny równoramienny.



8. Z założenia $|AD| = |BC|$

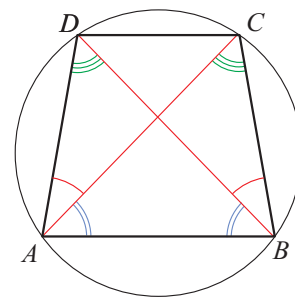
$$|\angle DBC| = |\angle CAD| - \text{kąty wpisane oparte na tym samym łuku}$$

$$|\angle CAB| = |\angle ABD| - \text{kąty oparte na tym samym łuku,}$$

bo cięciwy równej długości

$$|\angle DBC| = |\angle CAD| - \text{kąty oparte na tym samym łuku}$$

$$\triangle ACB \cong \triangle BDA \Rightarrow |AC| = |BD|.$$

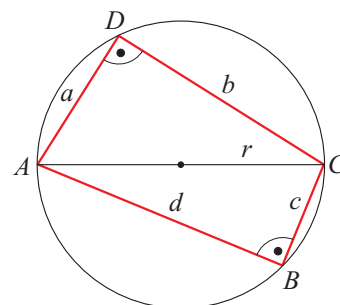


9. Z warunku, że jeden kąt czworokąta jest prosty i okrąg jest opisany na czworokącie wynika, że przeciwległy kąt jest prosty.

Trójkąty ABC i ADC są prostokątne.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymamy:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4r^2 \\ c^2 + d^2 = 4r^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

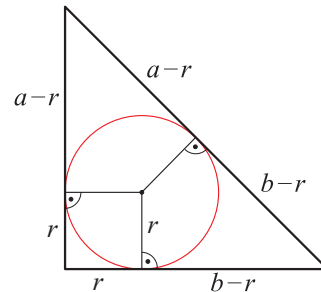


10. Z warunku, że okrąg jest wpisany w trójkąt prostokątny wynika:

$$b-r+a-r=c \quad \wedge \quad c=2R$$

$$a+b=2r+2R$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r(2r+2R+2R) = 2Rr+r^2.$$

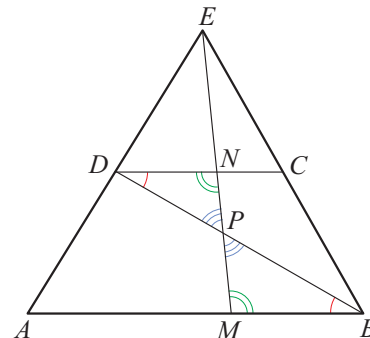


11. Z założenia $|AE| = 2|AD| \Rightarrow D$ jest środkiem odcinka AE i $AB \parallel CD$, to $|DC| = \frac{1}{2}|AB|$.

$$\text{Z założenia } |AM| = 2|MB| \Rightarrow |MB| = \frac{1}{3}|AB|$$

$$\left. \begin{array}{l} |\angle MBD| = |\angle BDC| \text{ – kąty naprzemianległe} \\ |\angle DPN| = |\angle MPB| \text{ – kąty wierzchołkowe} \\ |\angle BMP| = |\angle DNP| \\ |DN| = |MP| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\stackrel{kkk}{\Rightarrow} \Delta BMP \cong \Delta DPN \Rightarrow |BP| = |PD|.$$



12. D: $P_{\Delta CDE} = \frac{1}{2}x \cdot 2d \sin(180^\circ - \alpha) = x \cdot d \cdot \sin \alpha$,

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{\Delta CDB} = 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot d \sin \alpha = x \cdot d \cdot \sin \alpha, \quad P_{\Delta CDE} = P_{ABCD}.$$

13. Z: ΔABC – ostrokątny, ΔBCE – równoboczny, ΔACD – równoboczny. Miara kąta wewnętrznego w każdym trójkącie równobocznym jest równa 60° .

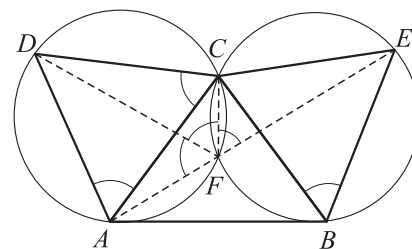
$$\text{D: } |\angle CFE| = 60^\circ,$$

$\angle CFE$ – kąt wpisany oparty na tym samym łuku, co $\angle CBE$.

$|\angle AFD| = 60^\circ$, $\angle AFD$ – oparty na tym samym łuku, co $\angle ACD$.

$$|\angle DFC| = 60^\circ.$$

Zatem $|\angle AFD| + |\angle DFC| + |\angle CFE| = 180^\circ$, stąd punkty AFE są współliniowe, należą do jednej prostej.



ARKUSZ I

ZADANIA ZAMKNIĘTE

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. B. | 2. C. | 3. C. | 4. A. | 5. C. |
| 6. B. | 7. C. | 8. B. | 9. C. | 10. D. |
| 11. D. | 12. B. | 13. C. | 14. A. | 15. B. |
| 16. A. | 17. C. | 18. D. | 19. C. | 20. A. |

ZADANIA OTWARTE

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| 1. $x \in \langle -2; 3 \rangle$. | 2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. | 3. $y = -\frac{5}{2}x + 8$. |
| 4. $\frac{12}{25}$. | 5. $n = 11$. | 6. $a_{12} = 93$. |

7. D: $\sqrt{(x+z)(y+k)} \geq \sqrt{xy} + \sqrt{zk}$ podnosząc nierówność obustronnie do kwadratu otrzymamy:

$$(x+z)(y+k) \geq xy + zk + 2\sqrt{xyzk}$$

$$xy + xk + zy + zk - xy - zk \geq 2\sqrt{xyzk}$$

$xk + zk \geq 2\sqrt{xyzk}$ podnosząc nierówność obustronnie do kwadratu otrzymamy:

$$(xk)^2 + (zy)^2 + 2xyzk \geq 4xyzk$$

$$(xk - zy)^2 \geq 0 \quad \text{nierówność tożsamościowa.}$$

8. Z założenia CD jest środkową, to

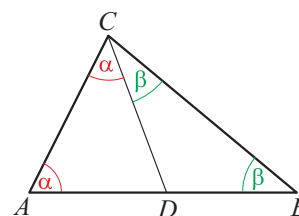
$$|AD| = |DB| = |CD| \Rightarrow \Delta ADC \text{ jest równoramienny}$$

i ΔBDC jest równoramienny.

Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180° ,

zatem $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, to $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $|\angle ACB| = 90^\circ$.

Trójkąt ACB jest prostokątny.

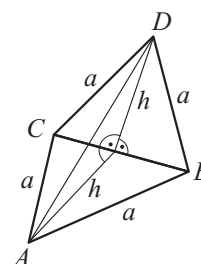


9. $d = \frac{24\sqrt{13}}{13}$.

10. $P = 24$.

11. $V = 216 \text{ cm}^3$,

$P_c = 36\sqrt{15} + 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$. (Rysunek obok)



12. 70.

13. $P(A) = \frac{5}{6^4}$.

ARKUSZ II

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. D.

2. A.

3. B.

4. B.

5. B.

6. D.

7. C.

8. D.

9. B.

10. C.

11. A.

12. B.

13. B.

14. A.

15. D.

16. C.

17. D.

18. B.

19. B.

20. A.

ZADANIA OTWARTE

1. 0,0388.

2. $3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 9 + 5^n \cdot 25 + 5^n = 3^n(1 + 3 + 9) + 5^n(25 + 1) = 3^n \cdot 13 + 5^n \cdot 26 = 13(3^n + 2 \cdot 5^n) = 13k, \quad k \in \mathbb{N}$.

3. $x \in (-3; 5)$.

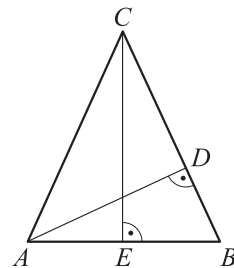
4. $a = 2(2\sqrt{3} + 3)$.

5. **Wskazówka:** Dzieląc licznik i mianownik wyrażenia przez $\cos \alpha$ otrzymamy:

$$\frac{\frac{2}{3} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - 4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{5 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{2}{3} - 4 \cdot 3}{5 - 3 \cdot 3} = \frac{\frac{2}{3} - 12}{5 - 9} = \frac{-11\frac{1}{3}}{-4} = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$$

6. $P = 66$.

7. D: $\triangle ADB \stackrel{kkk}{\sim} \triangle CEB \Rightarrow \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|AB|^2 = |BD| \cdot |BC|$ (rysunek obok).



8.
$$\begin{cases} x = 16 & S_1 = 48 \\ y = 32 & S_2 = 56. \end{cases}$$

9. $\triangle ABC$ jest prostokątny, bo $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.

$BD: 11x + 3y - 34 = 0$.

10. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. a) $P(A) = \frac{3}{28}$; b) $P(B) = \frac{25}{28}$.

ARKUSZ III

ZADANIA ZAMKNIĘTE

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. B. | 2. A. | 3. D. | 4. B. | 5. A. |
| 6. B. | 7. A. | 8. C. | 9. B. | 10. D. |
| 11. C. | 12. A. | 13. B. | 14. A. | 15. A. |
| 16. C. | 17. B. | 18. A. | 19. D. | 20. C. |

ZADANIA OTWARTE

- | | |
|---|---|
| 1. $x = \frac{1}{3}$. | 2. D: $2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1 = (2015 + 1)^2 = 2016^2$. cnd. |
| 3. 721. | 4. 0,9. |
| 5. Ciąg a_n jest geometryczny $\Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$b_n = 5 \cdot a_1 \cdot q^n - 2 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}(5q - 2)$
$b_{n+1} = 5 \cdot a_1 \cdot q^{n+1} - 2 \cdot a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^n(5q - 2)$
$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1 \cdot q^n(5q - 2)}{a_1 \cdot q^{n-1}(5q - 2)} = q$
iloraz kolejnych wyrazów ciągu b_n jest stały, czyli jest to ciąg geometryczny. | |
| 6. $ AD = 32$. | 7. $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot \sin \alpha = 1$. |
| 8. $S = 179429$. | 9. $V = 40,5$, $P_c = 60,75\sqrt{3}$. |
| 10. $P(A) = \frac{8}{15}$. | 11. $AC \perp BD$, $P_{ABCD} = 96$. |

Powtórka przed maturą!

„Nowa matura”, czyli matura zgodna z nową podstawą programową, jak wszystko co jeszcze nieznane, wprowadzające zmiany, budzi lęk i rozmaite obawy. Doskonale to rozumiemy! Drogi Czytelniku, nie bój się, pamiętaj, że strach ma wielkie oczy, wyolbrzymia zwykłe wątpliwości – i że bardzo łatwo sobie z nim poradzić, poznając to, z czym masz się zmierzyć. Niniejszy zeszyt ćwiczeń pomoże Ci skutecznie przygotować się do matury, a to będzie gwarancją poczucia bezpieczeństwa i pewności siebie w czasie egzaminu! Dołożyliśmy starań, aby forma zeszytu ćwiczeń ułatwiała pracę i pomogła w osiągnięciu sukcesu.

Forma ćwiczeń zawartych w książce *Matura 2016. Matematyka* nawiązuje do znanej już wcześniej i życzliwie przyjętej *Powtórki przed maturą*. *Ćwiczenia z matematyki* i uwzględnia wymagania nowej podstawy programowej, jest tak skonstruowana, by dobrze przygotować do egzaminów przeprowadzanych według formuły obowiązującej od roku 2015. Nowością są dodane na końcu trzy autorskie arkusze maturalne, które posłużą skutecznej weryfikacji wiedzy.

Rozwiązania zadań, odpowiedzi na postawione pytania i wskazówki są umieszczone na końcu zbioru.

Matura 2016. Matematyka może być także bardzo użytecznym narzędziem w pracy nauczyciela. Pomaga przy powtórkach materiału, wspiera w ćwiczeniu umiejętności koniecznych, aby bez lęku przystąpić do egzaminu z matematyki.

Maturzystom polecamy także:



Książki godne uwagi...

www.nowik.com.pl



Wydawnictwo Nowik Sp. j.

Biuro Handlowe: 45-061 Opole, ul. Katowicka 39 p. 104



tel. 77 454 36 04



mail: matma@nowik.com.pl

ISBN 978-83-62687-83-1

