Spis treści

Wstęp

Przy rozwiązywaniu zadań matematyczno-fizycznych o zegarach bądź zadań związanych z zegarami można napotkać różne trudności. Bierze się to stąd, że zadania takie na ogół nie są zadaniami typowymi. Występuje w nich element ruchu, w którym wskazówki zegara (godzinowa, minutowa, sekundowa) poruszają się z różnymi prędkościami.

Autorzy przygotowali niniejszy zbiór zadań wraz z rozwiązaniami, mając na uwadze nie tylko kłopoty związane z rozwiązywaniem zadań o zegarach, ale także zamiar popularyzacji takich zadań jako niezwykle kształcących. Podajemy zadania dotyczące różnych rodzajów zegarów: tradycyjnych (sprężynowych i bateryjnych), wahadłowych (wahadeł) i klepsydr.

Stosować bedziemy dwojaki system mierzenia czasu. Z jednej strony będziemy mierzyć czas w godzinach, minutach i sekundach, z drugiej zaś – wielkością kąta środkowego, zakreślonego przez wskazówki zegara, w radianach.

Wartość 1 radiana (skrót 1 rad) w mierze łukowej ma kąt środkowy oparty na łuku okręgu, ktorego długość jest równa długości promienia tego okręgu. Mamy więc:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

skąd $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44''$. Wskazówka godzinowa zegara zakreśla kąt pełny (o mierze równej 2π rad) w czasie 12 godzin. W sposób równoważny można więc zamienić godziny na radiany i na odwrót następująco: 12 h ~ 2π rad. Stąd:

$$1 \text{ h} \sim \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad 1 \text{ min} \sim \frac{\pi}{6 \cdot 60} \text{ rad}, \quad 1 \text{ s} \sim \frac{\pi}{6 \cdot 60^2} \text{ rad},$$

$$x \text{ min} \sim x \cdot \frac{\pi}{6 \cdot 60} \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} \sim \frac{6}{\pi} \text{ h}, \quad \alpha \text{ rad} \sim \alpha \cdot \frac{6}{\pi} \text{ h}.$$

Część I zbioru zadań zawiera wyłącznie treści zadań. Aby zachęcić Czytelnika do samodzielnej pracy nad zadaniami, rozwiązania podano dopiero w Części II. W ten sposób Czytelnik bedzie miał okazję porównać własne metody rozwiązań z rozwiązaniami podanymi w zbiorze.

W zbiorze występują zadania o różnym stopniu trudności. Nie jest jednak łatwe usystematyzowanie ich według narastającego stopnia trudności bądź też według innych kryteriów. Zdarza się więc, że zadania łatwiejsze następują niekiedy po zadaniach trudniejszych. Zauważmy też, że stopień trudności zależy nie tylko od treści zadania, ale także od wyboru metody rozwiązania.

Do rozwiązania zadań wystarczą na ogół wiadomości z matematyki i fizyki na poziomie średnim. Niekiedy jednak trzeba skorzystać z aparatu matematyki wyższej.

Symbolem [ ] oznaczono pozycje bibliograficzne, z których zaczerpnięto treści zadań lub ich rozwiązania. W przypadku zapożyczeń niekiedy w sposób nieistotny zmieniono tekst zadania, zachowując wszystkie podane warunki. Brak symbolu [ ] oznacza, że treści zadań i ich rozwiązania pochodzą od autorów niniejszego zbioru.

Każda z części A, B, C ma własną numerację zadań i rysunków.

Autorzy będą wdzięczni za wszelkie uwagi, zwłaszcza krytyczne, dotyczące niniejszego zbioru zadań, a także za udostępnienie nowych zadań, wskazanie źródeł, zawierających nowe zadania oraz za podanie innych sposobów rozwiązania zamieszczonych zadań.

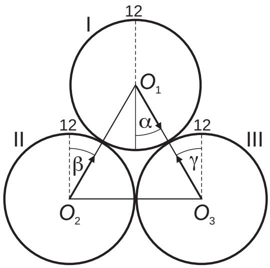
Część I.
Zadania o zegarach

A Zegary tradycyjne

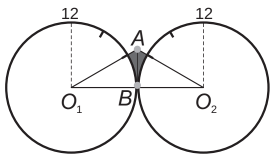
1 –A. Jeżeli zegar ścienny wybija godzinę VI w ciągu 6 sekund, to ile czasu zużyje na wybicie godziny XII? [4]

2 –A. Licząc od godziny 12 w południe w danym dniu, zegarek z centralnym sekundnikiem zatrzymał się o godzinie pierwszej po południu po upływie 10 dób. Ile kilometrów zakreślił do tego czasu koniec wskazówki sekundowej, jeśli ma ona długość 1,5 cm?

3 –A. Którą godzinę wskazuje wskazówka godzinowa każdego z trzech zegarków podanych na rys. 1-A, jeżeli są one parami styczne i mają taką samą średnicę?



Rys. 1-A



Rys. 2-A

4 –A. Dwa zegarki o tej samej średnicy d leżą na stole i są styczne zewnętrznie (rys. 2-A). Obliczyć pole figury leżącej w trójkącie AO_1O_2 na zewnątrz zegarków, jeśli punkt A jest punktem przecięcia się półprostych wyznaczonych przez wskazówki godzinowe zegarków odpowiednio o godzinie 2^{00} i o godzinie 10^{00}.

5-A. Zegar, spóźniając się, o godzinie 12 pokazuje 11 godzinę 48 minut, a o godzinie 18 pokazuje 17 godzinę i 30 minut. Kiedy wskazywał w tym dniu godzinę prawidłową? [9]

6-A. W ciągu dnia zegarek przyspiesza o $\frac{1}{2}$ minuty, zaś w ciągu nocy opóźnia się o $\frac{1}{3}$ minuty. Rankiem 1 maja zegarek pokazwał jeszcze dokładny czas. Od którego dnia maja zegarek będzie przyspieszał o 5 minut? [8]

7-A. Zegar jest rozregulowany, jednakże jego wskazówki poruszaja się równomiernie. O ile godzin opóźniają się lub przyspieszają na dobę, jeżeli pokazują dokładny czas: 1 raz na dobę; 2 razy na dobę; 3 razy na dobę? [1]

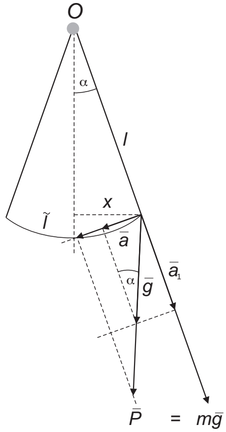
8-A. Zegarek spóźnia się co godzinę o 2 minuty. W pewnej chwili według czasu radiowego jest godzina 12. Kiedy zegarek wskaże godzinę 12, jeżeli 5 godzin temu wskazywał dokładny czas? [10]

9-A. Zegar chodzi dobrze, ale źle wybija godziny: nie wybija godziny dwunastej, lecz po wybiciu godziny jedenastej wybija godzinę pierwszą. Wskutek tego z bicia zegara rzadko można dowiedzieć się, która godzina jest w rzeczywistości. Ale czasem zdarza się, że zegar wybije prawidłową godzinę. Tak było w poniedziałek o godzinie dziesiątej rano – zegar wybił godzinę dziesiątą. Kiedy zegar znów wybije rzeczywistą godzinę? [10]

10-A. Jeden z największych filozofów niemieckich, Immanuel Kant (1724–1784), profesor Uniwersytetu Królewieckiego, był samotnikiem, starym kawalerem. Prowadził on tak regularny żywot, że obywatele królewieccy sprawdzali zegarki, gdy tylko zobaczyli go wychodzącego z domu i spiesznie podążającego na wykład do uniwersytetu. Pewnego wieczora Kant z przerażeniem zobaczył, że jego ścienny zegar stoi nienakręcony. Widocznie służący, którego przyjął na służbę poprzedniego dnia nie wiedział, że ma go nakręcić.

B Zegary wahadłowe

Wahadło matematyczne – to układ złożony z punktu materialnego, zawieszonego w nieruchomym punkcie na nieważkiej i nierozciągliwej nici (lub pręcie), przy czym ten punkt materialny wykonuje ruch w płaszczyźnie pionowej pod wpływem własnego ciężaru (rys. 1-B).



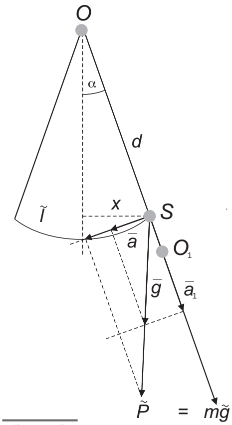
Rys. 1-B

Przyjmujemy, że $\sin\alpha \approx \alpha$, $\tilde{l} \approx x$, dla małych α. Okres drgań: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Wzór ten można uzasadnić następująco: wartość przyspieszenia $\bar{a}$ (rys. 1-B) w ruchu wahadłowym wynosi $a = g\sin\alpha = g \cdot \frac{x}{l}$, zaś w ruchu harmonicznym wynosi $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x = \omega^2 \cdot x$, gdzie ω jest częstotliwością kątową (kołową). Mamy więc $g \cdot \frac{x}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x$, skąd $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, czyli $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Wahadło sekundowe to wahadło o okresie $T = 1\,\text{s}$. Niekiedy dla wahadła sekundowego przyjmuje się $T = 2\,\text{s}$.

Wahadło fizyczne – to układ złożony z ciała sztywnego, wykonującego drgania pod wpływem działania własnego ciężaru wokół nieruchomej osi poziomej, nie przechodzącej przez środek ciężkości (rys. 2-B).



Rys. 2-B

Dla małych wahań α przyjmujemy $\sin\alpha \approx \alpha, \widetilde{l} \approx x$ (rys. 2-B). Okres wahań: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}}$, gdzie

J – moment bezwładności ciała względem osi wahania O,
d – odległość środka ciężkości S od punktu O.

Wzór na okres drgań dla wahadła fizycznego można otrzymać następująco. Ruch obrotowy wykonywany jest przez siłę $\vec{P}_1$ o wartości $P_1 = P\sin\alpha$. Wartość momentu tej siły względem osi O wynosi $(P\sin\alpha)\cdot d$. Wartość momentu siły równa jest iloczynowi momentu bezwładności J przez przyspieszenie kątowe γ ($\gamma = \frac{a}{d}$, gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem liniowym).

Mamy więc $(P\sin\alpha)\cdot d = J\cdot\gamma$. Ponieważ $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{x}{d}$ (dla małych α), zatem $P\cdot\frac{x}{d}\cdot d = J\cdot\frac{a}{d}$, czyli $a = \dfrac{mgd}{J}\cdot x$. W ruchu harmonicznym mamy $a = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\cdot x$, zatem $\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\cdot x = \dfrac{mgd}{J}\cdot x$, skąd $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}}$.

Zredukowana długość wahadła fizycznego l_r względem osi obrotu, to długość wahadła matematycznego mającego ten sam okres drgań co dane wahadło fizyczne. Z warunku $\dfrac{g}{l} = \dfrac{mgd}{J}$ otrzymujemy $l_r = \dfrac{J}{md} \rangle d$. Środek O_1 (rys. 2-B) wahań wahadła fizycznego leży na prostej OS w odległości $OO_1 = l_r$.

Jeżeli do układu drgającego (wahadła) nie doprowadzamy energii, to drgania stopniowo zanikają, ich amplituda maleje i układ przechodzi w stan spoczynku. W zegarach wahadłowych dla uniknięcia tłumienia, drgania niegasnące otrzymuje się dzięki mechanizmom sprężynowym lub odważnikowym (ciężarkom), dostarczającym energii do układu.