Witold Bednarek

Jeśli lubisz matematykę

Część 3

Opole 2011

1

Wielokąt wypukły i kąty proste

Pewien wielokąt wypukły ma cztery kąty proste. Czy wielokąt ten musi być prostokątem?

Niech n oznacza liczbę wierzchołków rozważanego wielokąta. Jak wiadomo, suma kątów n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

Przypuśćmy, że nasz wielokąt nie jest prostokątem, czyli $n > 4$. Zatem $n - 4$ będzie liczbą kątów nieprostych, a ponieważ wielokąt jest wypukły, więc każdy z tych kątów jest mniejszy od 180°. Mamy zatem nierówność

$$(n-2)\cdot 180° < 4\cdot 90° + (n-4)\cdot 180°.$$

Po podzieleniu obu stron przez 180° otrzymujemy

$$n-2 < 2+n-4$$

czyli $$n-2 < n-2,$$

a więc sprzeczności. Tym samym wielokąt wypukły, który ma cztery kąte proste, musi być prostokątem.

Zadanie

Ile maksymalnie kątów ostrych może mieć n-kąt wypukły?

2

Wielokąt o prostopadłych bokach

Rozważmy wielokąt, który ma n ($n \geq 4$) wierzchołków i każde jego dwa kolejne boki są prostopadłe. Wówczas każdy jego kąt jest równy 90° albo 270° Niech k i m oznaczają odpowiednio liczbę kątów równych 90° i 270°. Mamy oczywiście

$$k + m = n. \tag{1}$$

Ponieważ, jak wiadomo, suma kątów n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180°$, więc

$$k\cdot 90° + m\cdot 270° = (n-2)\cdot 180°$$

Po przekształceniu powyższa równość przyjmuje postać

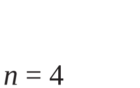
$$k + 3m = 2n - 4 \tag{2}$$

Z równości (1) i (2) wyznaczamy

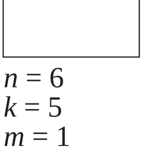
$$k = \frac{n}{2} + 2 \quad \text{i} \quad m = \frac{n}{2} - 2$$

Widać, że podana sytuacja może mieć miejsce wtedy, gdy $n \geq 4$ jest liczbą parzystą.

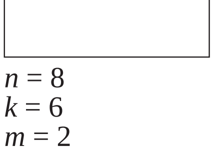
Oto przykłady:

a) 

$n = 4$
$k = 4$
$m = 0$

b) 

$n = 6$
$k = 5$
$m = 1$

c) 

$n = 8$
$k = 6$
$m = 2$

Zadanie

Podaj podobne przykłady dla $n \in \{10,12,14\}$.

16

Twierdzenia Euklidesa i Dirichleta

Już Euklides udowodnił, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Przeprowadził dowód znaną w starożytności metodą „do sprzeczności". Załóżmy więc, że liczb pierwszych jest skończenie wiele i tworzą one zbiór $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Rozważmy liczbę

$$L = p_1 p_2 ... p_n + 1 \text{ (większą od 1).}$$

Niech $p_i \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ będzie jej dzielnikiem pierwszym, czyli

$$p_i \mid L = p_1 p_2 ... p_n + 1.$$

Oczywiście $p_i \mid p_1 p_2 ... p_n$.

Z tych dwóch podzielności wynika, że $p_i \mid 1$, co oczywiście jest niemożliwe..

P.G. Lejeune Dirichlet znacznie wzmocnił twierdzenie Euklidesa. Niech *a* i *b* będą liczbami całkowitymi dodatnimi względnie pierwszymi. Twierdzenie Dirichleta głosi, że liczb pierwszych postaci $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, 3, ...$) jest nieskończenie wiele. Dowód tego twierdzenia jest nieelementarny i trudny. Tylko dla niektórych liczb *a* i *b* dowód jest dość prosty. Oto przykład:

Wykażemy, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$ jest nieskończenie wiele. Załóżmy wbrew tezie, że jest ich skończona liczba i tworzą one zbiór $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Rozważmy liczbę

$$L = 4q_1 q_2 ... q_n - 1 \text{ (większą od 1).}$$

Liczba *L* jest nieparzysta. Gdyby jej każdy dzielnik pierwszy był postaci $4k + 1$, to ich iloczyn byłby tej samej postaci (dlaczego?). Natomiast liczba *L* jest postaci $4k + 3$ (dlaczego?).

Zatem dla pewnego $q_i \in \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ mamy

$$q_i \mid L = 4q_1q_2...q_n - 1.$$

Oczywiście $$q_i \mid q_1q_2...q_n.$$

Z tych dwóch podzielności wynika, że $q_i \mid 1$, co jest niemożliwe.

Zadanie

Wykaż, że liczb pierwszych postaci
a) $3k + 2$
b) $6k + 5$
jest nieskończenie wiele.

17

Twierdzenie Wilsona

Twierdzenie to orzeka, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$p \mid 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (p-1)+1,$$

czyli
$$(p-1)!+1\equiv 0 \text{ (mod } p).$$

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, tzn. jeśli spełniona jest podana podzielność, to p jest liczbą pierwszą.

Mamy na przykład

$$5 \mid 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1=25,$$
$$7 \mid 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1=721.$$

Stosując zasadę indukcji, łatwo jest udowodnić, że dla każdego $k\geq 1$:

(*) $$(k-1)!(p-k)!+(-1)^{k-1}\equiv 0 \text{ (mod } p)$$

(Dla k = 1 mamy twierdzenie Wilsona, bo $0!=1$ i $(-1)^0=1$).

Jeżeli p > 2, to p jest nieparzyste i wtedy liczba $\frac{p+1}{2}$ jest naturalna.

Dla $k=\frac{p+1}{2}$ kongruencja (*) przyjmuje postać po przekształceniach:

($\ast\ast$) $$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0 \;(\text{mod } p).$$

Zadanie

Korzystając z kongruencji ($\ast\ast$), wykaż, że dla p > 2 zachodzą podzielności:

(a) $$p \mid 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot \ldots \cdot (p-2)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

(b) $$p \mid 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \ldots \cdot (p-1)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Spis treści