

Witold Bednarek

Jeśli lubisz matematykę

Część 3

Opole 2011



Wielokąt wypukły i kąty proste

Pewien wielokąt wypukły ma cztery kąty proste. Czy wielokąt ten musi być prostokątem?

Niech n oznacza liczbę wierzchołków rozważanego wielokąta. Jak wiadomo, suma kątów n -kąta wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Przypuśćmy, że nasz wielokąt nie jest prostokątem, czyli $n > 4$. Zatem $n - 4$ będzie liczbą kątów nieprostych, a ponieważ wielokąt jest wypukły, więc każdy z tych kątów jest mniejszy od 180° . Mamy zatem nierówność

$$(n - 2) \cdot 180^\circ < 4 \cdot 90^\circ + (n - 4) \cdot 180^\circ.$$

Po podzieleniu obu stron przez 180° otrzymujemy

$$n - 2 < 2 + n - 4$$

czyli
$$n - 2 < n - 2,$$

a więc sprzeczności. Tym samym wielokąt wypukły, który ma cztery kąty proste, musi być prostokątem.

Zadanie

Ile maksymalnie kątów ostrych może mieć n -kąta wypukły?

2

Wielokąt o prostopadłych bokach

Rozważmy wielokąt, który ma n ($n \geq 4$) wierzchołków i każde jego dwa kolejne boki są prostopadłe. Wówczas każdy jego kąt jest równy 90° albo 270° . Niech k i m oznaczają odpowiednio liczbę kątów równych 90° i 270° . Mamy oczywiście

$$(1) \quad k + m = n.$$

Ponieważ, jak wiadomo, suma kątów n -kąta wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$, więc

$$k \cdot 90^\circ + m \cdot 270^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Po przekształceniu powyższa równość przyjmuje postać

$$(2) \quad k + 3m = 2n - 4$$

Z równości (1) i (2) wyznaczamy

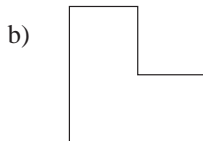
$$k = \frac{n}{2} + 2 \quad \text{i} \quad m = \frac{n}{2} - 2$$

Widać, że podana sytuacja może mieć miejsce wtedy, gdy $n \geq 4$ jest liczbą parzystą.

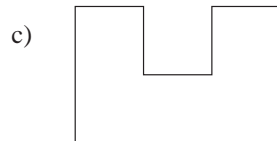
Oto przykłady:



$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 4 \\ m &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n &= 6 \\ k &= 5 \\ m &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n &= 8 \\ k &= 6 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Zadanie

Podaj podobne przykłady dla $n \in \{10,12,14\}$.

16

• • • Twierdzenia Euklidesa i Dirichleta

Już Euklides udowodnił, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Przeprowadził dowód znaną w starożytności metodą „do sprzeczności”. Załóżmy więc, że liczb pierwszych jest skończenie wiele i tworzą one zbiór $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Rozważmy liczbę

$$L = p_1 p_2 \dots p_n + 1 \text{ (większą od 1).}$$

Niech $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie jej dzielnikiem pierwszym, czyli

$$p_i \mid L = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

Oczywiście $p_i \mid p_1 p_2 \dots p_n$.

Z tych dwóch podzielności wynika, że $p_i \mid 1$, co oczywiście jest niemożliwe..

P.G. Lejeune Dirichlet znacznie wzmocnił twierdzenie Euklidesa. Niech a i b będą liczbami całkowitymi dodatnimi względnie pierwszymi. Twierdzenie Dirichleta głosi, że liczb pierwszych postaci $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) jest nieskończenie wiele. Dowód tego twierdzenia jest nieelementarny i trudny. Tylko dla niektórych liczb a i b dowód jest dość prosty. Oto przykład:

Wykażemy, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$ jest nieskończenie wiele. Załóżmy wbrew tezie, że jest ich skończona liczba i tworzą one zbiór $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Rozważmy liczbę

$$L = 4q_1 q_2 \dots q_n - 1 \text{ (większą od 1).}$$

Liczba L jest nieparzysta. Gdyby jej każdy dzielnik pierwszy był postaci $4k + 1$, to ich iloczyn byłby tej samej postaci (dlaczego?). Natomiast liczba L jest postaci $4k + 3$ (dlaczego?).

Zatem dla pewnego $q_i \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ mamy

$$q_i \mid L = 4q_1q_2 \dots q_n - 1.$$

Oczywiście

$$q_i \mid q_1q_2 \dots q_n.$$

Z tych dwóch podzielności wynika, że $q_i \mid 1$, co jest niemożliwe.

Zadanie

Wykaż, że liczb pierwszych postaci

a) $3k + 2$

b) $6k + 5$

jest nieskończenie wiele.

Twierdzenie Wilsona

Twierdzenie to orzeka, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$p \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) + 1,$$

czyli
$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, tzn. jeśli spełniona jest podana podzielność, to p jest liczbą pierwszą.

Mamy na przykład

$$5 \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25,$$

$$7 \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 721.$$

Stosując zasadę indukcji, łatwo jest udowodnić, że dla każdego $k \geq 1$:

$$(*) \quad (k-1)!(p-k)! + (-1)^{k-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

(Dla $k = 1$ mamy twierdzenie Wilsona, bo $0! = 1$ i $(-1)^0 = 1$).

Jeżeli $p > 2$, to p jest nieparzyste i wtedy liczba $\frac{p+1}{2}$ jest naturalna.

Dla $k = \frac{p+1}{2}$ kongruencja (*) przyjmuje postać po przekształceniach:

$$(*) \quad \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zadanie

Korzystając z kongruencji (*), wykaż, że dla $p > 2$ zachodzą podzielności:

$$(a) \quad p \mid 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$(b) \quad p \mid 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$



Spis treści

Od Autora.....	3
1. Wielokąt wypukły i kąty proste.....	5
2. Wielokąt o prostopadłych bokach.....	6
3. Parkietaże.....	8
4. Podział trójkąta równobocznego	12
5. Jedyny taki trójkąt	13
6. Nierówność $R \geq 2r$	15
7. Wysokości trójkąta.....	17
8. Twierdzenie Cevy	20
9. Wysokości trójkąta – raz jeszcze	23
10. Nierówność Erdösa i jej koleżanki	24
11. Prostopadłe styczne	26
12. Domki krasnoludków	28
13. Iloczyn równy sumie	30
14. Ciąg arytmetyczny i potęgi.....	32
15. Suma dwóch kwadratów liczb trójkątnych.....	34
16. Twierdzenia Euklidesa i Dirichleta.....	36
17. Twierdzenie Wilsona	38
18. Suma pewnych symboli Newtona	40
19. Suma odwrotności	43
20. Pewien ułamek łańcuchowy	45
21. Wielomiany a liczby pierwsze.....	47

22. Część całkowita w zadaniach	49
23. Funkcja Dirichleta	54
24. Suma funkcji okresowych	55
25. O sumie dzielników	57
26. Tajemnica liczb Fermata.....	59
27. O liczbach postaci $n^2 + n + 1$	60
28. O hipotezie Artina.....	61
29. Ciąg Fibonacciego i rozwinięcie dziesiętne	63
30. Pierwiastki łańcuchowe	65
31. Wzór Eulera w zadaniach	68
32. Stała Eulera i jej uogólnienie.....	71
33. O pewnych równaniach diofantycznych.....	73
34. Sumy o różnych składnikach	75
35. Liczbowe rodzeństwa	77
36. O pewnej hipotezie teorii liczb	79
37. O pewnej podzielności.....	81
38. Jak wymyślić podzielność?	82
39. O pewnej kongruencji z symbolem Newtona.....	84
Posłowie.....	86