

PIOTR PAWLIKOWSKI

W KRAJINIE WIEŁOŚCIANÓW



ZRÓB SOBIE BRYTKĘ

Opole 2006

Piotr Pawlikowski: *W krainie wielościanów. Zrób sobie bryłkę*

Redakcja: Krystyna Nowik

Fotografie: Waldemar Burcek

Projekt okładki: Michał Nowik

Skład komputerowy i rysunki: PHU TRIO S.C.

45-233 Opole, ul. Mikołajczyka 2

© Copyright by Piotr Pawlikowski
Opole 2006

**Wydawca wyraża zgodę na powielanie diagramów
zamieszczonych w *Dodatku* w celu wykonania modeli**

Powielanie innych części książki jest zabronione

ISBN-10: 83-89848-42-2

ISBN-13: 978-83-89848-42-0

Wydawnictwo NOWIK Sp. j.

Opole 2006

Wydanie pierwsze

Druk i oprawa:



Drukarnia Narodowa S.A.

ul. Marszałka Józefa Piłsudskiego 19

31-110 Kraków, Polska

www.drukarnianarodowa.pl

Dystrybucja: Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK Sp. J.

45-061 Opole, ul. Katowicka 39/110,

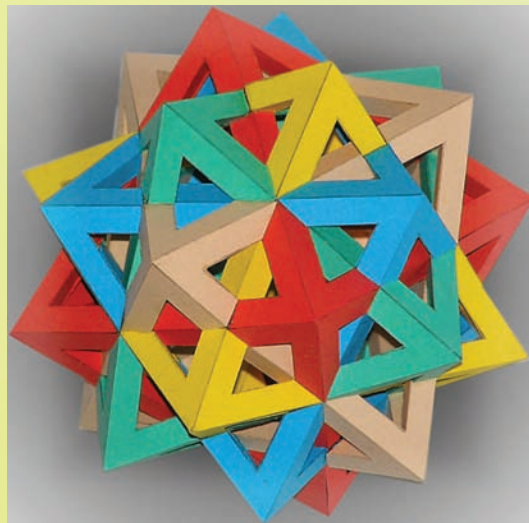
tel/fax: (0-77) 454 36 04

www.nowik.com.pl

e-mail: matma@nowik.com.pl

WSTĘP, KTÓRY WARTO PRZECZYTAĆ

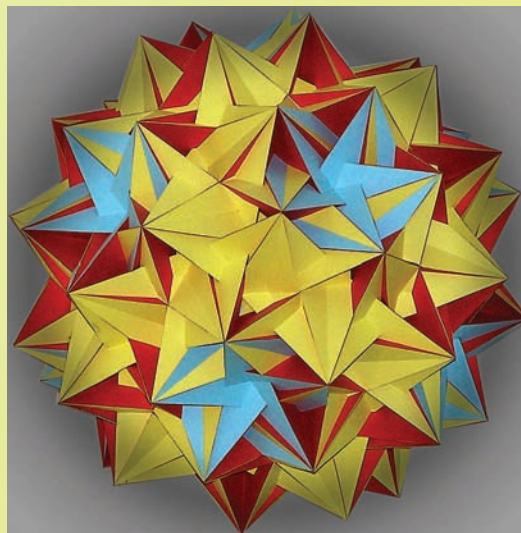
Hasło „wielościąg” kojarzy się zazwyczaj z ostrosłupem lub graniastosłupem. Ale świat wielościągów jest znacznie bogatszy. Zamieszkują go bryły platońskie, archimedesowe, wielościąg Keplera-Poinsota – by wymienić tylko najważniejszych jego przedstawicieli. Zwiedzanie krainy wielościągów to fascynująca przygoda, podczas której napotyka się na coraz to nowe obiekty o zaskakujących własnościach. Wzajemne relacje pomiędzy nimi są często bardzo głębokie i wieloaspektowe.



Moja przygoda z wielościągami rozpoczęła się w lutym 1996 r. w Pile. Odbывała się tam wówczas V Krajowa Konferencja Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. Poznałem na niej Jana Baranowskiego i zobaczyłem jego kolekcję modeli wielościągów i łamigłówek przestrzennych. To on był moim pierwszym przewodnikiem po nieznanym wówczas krainie wielościągów. Pragnę mu w tym miejscu serdecznie podziękować za otwarcie przede mną drzwi do tego świata i delikatne popchnięcie do środka. Przekonałem się, jak mała była moja wiedza na temat geometrii przestrzeni. Postanowiłem nadrobić zaległości i uzupełnić moją matematyczną edukację. Swoje zainteresowania rozwijałem w grupie roboczej SNM „Warsztat Otwarty”, dzięki której poznałem wielu wspaniałych ludzi. Spróbowałem również swoich sił w wykonywaniu własnych modeli. Z upływem czasu moja kolekcja wielościągów, jak i wiedza na ich temat, powiększały się. W końcu uznałem, że warto się nią podzielić z innymi. Wiosną 2003 r. nawiązałem współpracę z kwartalnikiem *Magazyn Miłośników Matematyki*. Od tego czasu na jego łamach w dziale „Zrób sobie bryłkę” wprowadzam Czytelników w świat wielościągów. Książka jest zbiorem opublikowanych tam dotychczas tekstów, powiększonym o cztery rozdziały napisane specjalnie na jej potrzeby. W rozdziałach zamieszczone są zadania, do rozwiązania których zachęcam. Odpowiedzi prawidłowe znaleźć można na stronie wydawcy książki www.nowik.com.pl.

Podczas proponowanej wędrowki po krainie wielościągów poznamy ponad 40 różnych jej przedstawicieli. Podziwianie modeli na kartach książek lub na monitorze komputera jest z pewnością wartościowe, ale prawdziwy smak tego świata można poczuć dopiero wówczas, gdy obraca się w rękach prawdziwy model. Dlatego też książka jest nie tylko przewodnikiem po najważniejszych rodzajach wielościągów, ale zawiera również szczegółowe instrukcje pozwalające własnoręcznie wykonać modele wszystkich opisanych w niej wielościągów.

Wykonanie ładnego modelu wymaga oczywiście pewnej dokładności i staranności, ale to nie powinno nikogo dziwić – jeżeli cokolwiek chce się wykonać dobrze, to trzeba się trochę postarać. Szczegółowe instrukcje wykonania konkretnych modeli znajdują się w poszczególnych rozdziałach, ale warto poczynić w tym miejscu kilka uwag ogólnych. Modele najlepiej wykonywać z niezbyt grubego kartonu. Dobre efekty uzyskuje się, używając papieru kserograficznego o podwyższonej gramaturze (np. 160 g/m²). Rysunki przedstawiające siatki znajdujące się w *Dodatku* nadają się w większości przypadków do bezpośredniego kopiowania (bez potrzeby zmiany skali). W sytuacji ograniczonego dostępu do kserografu siatki można przenieść na karton poprzez ich „przedziurkowanie”. Przykładamy kartkę z siatką do tekturki, pod spód podkładamy plastikową lub drewnianą podkładkę (ewentualnie kilka starych gazet) i szpikulcem – np. nóżką cyrkla – przekłuwamy siatkę we wszystkich wierzchołkach. W ten sposób przenosimy ją dokładnie na tekturkę. Łączymy wierzchołki i otrzymujemy gotowy szablon. Szablon ten następnie przykładamy do kartonu, z którego chcemy wykonać model, i ponownie go nakłuwamy. Wierzchołków na kartonie nie łączymy, używając ołówka, ale „rysujemy” linie nożykiem do tapet, delikatnie nacinając karton wzdłuż krawędzi rysunku. Po wycięciu karton da się z łatwością zagiąć wzdłuż naciętych linii, a zagięcia te będą równe i dokładne. Tak przygotowaną siatkę sklejamy, używając „skrzydełek”. Bardziej skomplikowane modele wykonuje się etapami. Przygotowuje się pewne elementy, które następnie łączy się ze sobą. W miarę postępu pracy możemy obserwować, jak nasz model „rośnie”. Mamy również możliwość zagładnięcia do środka modelu. Aby model był trwały, potrzebny jest dobry klej. Zwykle kleje w sztyfcie raczej się nie nadają. Lepiej użyć kleju do sklejania puzzli lub szybko schnącego kleju do drewna.



Wykonanie niektórych modeli nie powinno zająć więcej niż 15–20 minut, ale są też i takie, do wykonania których potrzeba 15–20 godzin. Każdorazowo nagrodą za trud i wysiłek jest wspaniały model, który może być doskonałą ozdobą nie tylko szkolnej pracowni matematycznej. Wykonanie dobrego modelu nie wymaga specjalnych uzdolnień. Często z ust wątpiących we własne siły można usłyszeć „ja nie mam zdolności manualnych”. Dziesięć lat temu ja również tak myślałem, ale mimo to spróbowałem wykonać modele prostych wielościanów. Z czasem wykonywanie modeli stało się moją pasją. Każda, nawet najdłuższa, podróż rozpoczyna się od zrobienia pierwszego kroku.

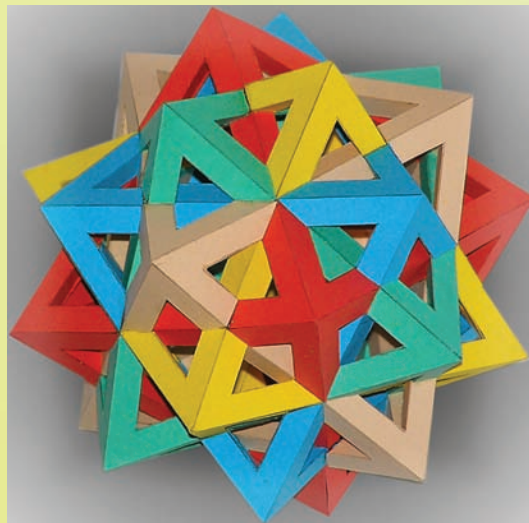
Zapraszam do krainy wielościanów.

Piotr Pawlikowski

Kluczbork maj-czerwiec 2006 r.

WSTĘP, KTÓRY WARTO PRZECZYTAĆ

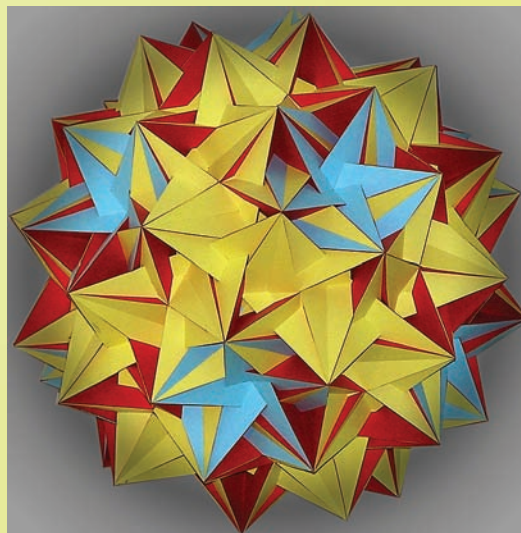
Hasło „wielościąg” kojarzy się zazwyczaj z ostrosłupem lub graniastosłupem. Ale świat wielościągów jest znacznie bogatszy. Zamieszkują go bryły platońskie, archimedesowe, wielościagany Keplera-Poinsota – by wymienić tylko najważniejszych jego przedstawicieli. Zwiedzanie krainy wielościągów to fascynująca przygoda, podczas której napotyka się na coraz to nowe obiekty o zaskakujących własnościach. Wzajemne relacje pomiędzy nimi są często bardzo głębokie i wieloaspektowe.



Moja przygoda z wielościągami rozpoczęła się w lutym 1996 r. w Pile. Odbывała się tam wówczas V Krajowa Konferencja Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. Poznałem na niej Jana Baranowskiego i zobaczyłem jego kolekcję modeli wielościągów i łamigłówek przestrzennych. To on był moim pierwszym przewodnikiem po nieznanym wówczas krainie wielościągów. Pragnę mu w tym miejscu serdecznie podziękować za otwarcie przede mną drzwi do tego świata i delikatne popchnięcie do środka. Przekonałem się, jak mała była moja wiedza na temat geometrii przestrzeni. Postanowiłem nadrobić zaległości i uzupełnić moją matematyczną edukację. Swoje zainteresowania rozwijałem w grupie roboczej SNM „Warsztat Otwarty”, dzięki której poznałem wielu wspaniałych ludzi. Spróbowałem również swoich sił w wykonywaniu własnych modeli. Z upływem czasu moja kolekcja wielościągów, jak i wiedza na ich temat, powiększały się. W końcu uznałem, że warto się nią podzielić z innymi. Wiosną 2003 r. nawiązałem współpracę z kwartalnikiem *Magazyn Miłośników Matematyki*. Od tego czasu na jego łamach w dziale „Zrób sobie bryłkę” wprowadzam Czytelników w świat wielościągów. Książka jest zbiorem opublikowanych tam dotychczas tekstów, powiększonym o cztery rozdziały napisane specjalnie na jej potrzeby. W rozdziałach zamieszczone są zadania, do rozwiązania których zachęcam. Odpowiedzi prawidłowe znaleźć można na stronie wydawcy książki www.nowik.com.pl.

Podczas proponowanej wędrowki po krainie wielościągów poznamy ponad 40 różnych jej przedstawicieli. Podziwianie modeli na kartach książek lub na monitorze komputera jest z pewnością wartościowe, ale prawdziwy smak tego świata można poczuć dopiero wówczas, gdy obraca się w rękach prawdziwy model. Dlatego też książka jest nie tylko przewodnikiem po najważniejszych rodzajach wielościągów, ale zawiera również szczegółowe instrukcje pozwalające własnoręcznie wykonać modele wszystkich opisanych w niej wielościągów.

Wykonanie ładnego modelu wymaga oczywiście pewnej dokładności i staranności, ale to nie powinno nikogo dziwić – jeżeli cokolwiek chce się wykonać dobrze, to trzeba się trochę postarać. Szczegółowe instrukcje wykonania konkretnych modeli znajdują się w poszczególnych rozdziałach, ale warto poczynić w tym miejscu kilka uwag ogólnych. Modele najlepiej wykonywać z niezbyt grubego kartonu. Dobre efekty uzyskuje się, używając papieru kserograficznego o podwyższonej gramaturze (np. 160 g/m²). Rysunki przedstawiające siatki znajdujące się w *Dodatku* nadają się w większości przypadków do bezpośredniego kopiowania (bez potrzeby zmiany skali). W sytuacji ograniczonego dostępu do kserografu siatki można przenieść na karton poprzez ich „przedziurkowanie”. Przykładamy kartkę z siatką do tekturki, pod spód podkładamy plastikową lub drewnianą podkładkę (ewentualnie kilka starych gazet) i szpikulcem – np. nóżką cyrkla – przekłuwamy siatkę we wszystkich wierzchołkach. W ten sposób przenosimy ją dokładnie na tekturkę. Łączymy wierzchołki i otrzymujemy gotowy szablon. Szablon ten następnie przykładamy do kartonu, z którego chcemy wykonać model, i ponownie go nakłuwamy. Wierzchołków na kartonie nie łączymy, używając ołówka, ale „rysujemy” linie nożykiem do tapet, delikatnie nacinając karton wzdłuż krawędzi rysunku. Po wycięciu karton da się z łatwością zagiąć wzdłuż naciętych linii, a zagięcia te będą równe i dokładne. Tak przygotowaną siatkę sklejamy, używając „skrzydełek”. Bardziej skomplikowane modele wykonuje się etapami. Przygotowuje się pewne elementy, które następnie łączy się ze sobą. W miarę postępu pracy możemy obserwować, jak nasz model „rośnie”. Mamy również możliwość zagłębienia do środka modelu. Aby model był trwały, potrzebny jest dobry klej. Zwykle kleje w sztyfcie raczej się nie nadają. Lepiej użyć kleju do sklejania puzzli lub szybko schnącego kleju do drewna.



Wykonanie niektórych modeli nie powinno zająć więcej niż 15–20 minut, ale są też i takie, do wykonania których potrzeba 15–20 godzin. Każdorazowo nagrodą za trud i wysiłek jest wspaniały model, który może być doskonałą ozdobą nie tylko szkolnej pracowni matematycznej. Wykonanie dobrego modelu nie wymaga specjalnych uzdolnień. Często z ust wątpiących we własne siły można usłyszeć „ja nie mam zdolności manualnych”. Dziesięć lat temu ja również tak myślałem, ale mimo to spróbowałem wykonać modele prostych wielościanów. Z czasem wykonywanie modeli stało się moją pasją. Każda, nawet najdłuższa, podróż rozpoczyna się od zrobienia pierwszego kroku.

Zapraszam do krainy wielościanów.

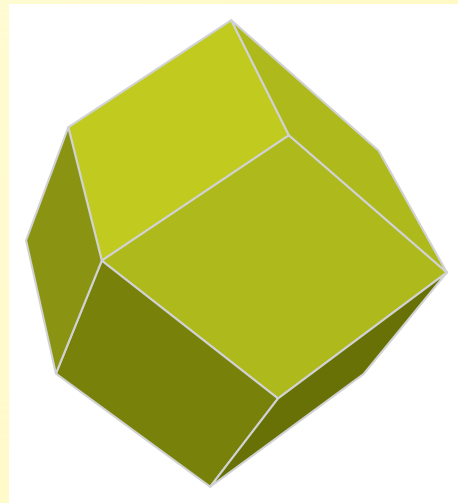
Piotr Pawlikowski

Kluczbork maj-czerwiec 2006 r.

10. Gwiazdki z gwiazd dwunastu (2)

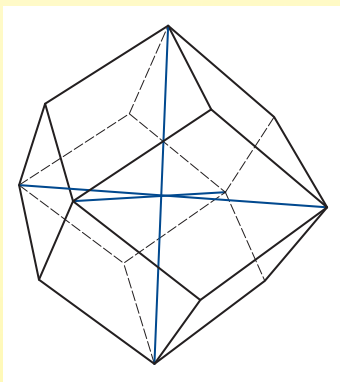
W rozdziale 5. poznaliśmy dwunastościan rombowy – wielościan o wielu ciekawych własnościach (tworzy on m.in. parkietaż przestrzenny). Bohaterem tego rozdziału jest inny wielościan tworzący przestrzenny parkietaż – dwunastościan gwiazdzisty rombowy. Nazwa tej gwiazdki może być nieco myląca, gdyż ściany jej wcale nie są rombami, ale sposób jej konstrukcji tłumaczy taką właśnie nazwę.

Spójrzmy ponownie na keplerowski dwunastościan rombowy (rys. 10.1). Ma on dwa rodzaje wierzchołków – sześć, w których schodzą się 4 ściany, i osiem, w których schodzą się 3 ściany.

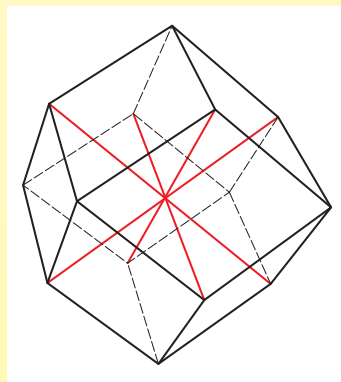


Rys. 10.1

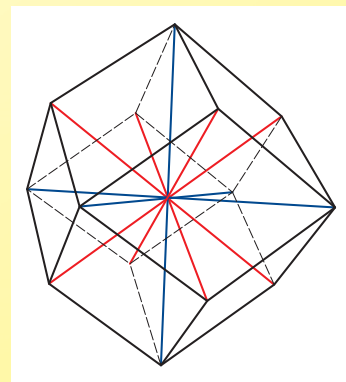
Poprowadźmy w nim 3 przekątne łączące wierzchołki pierwszego rodzaju (rysunek 10.2). Następnie dołączmy 4 przekątne łączące wierzchołki drugiego rodzaju (rys. 10.3). Wszystkie poprowadzone odcinki przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem symetrii całego dwunastościanu (rys. 10.4) i wyznaczają w nim 12 przystających ostrosłupów. Ich podstawami są ściany bryły, a wierzchołkiem jest punkt wspólny wszystkich siedmiu przekątnych. Pojedynczy ostrosłup przedstawia rysunek 10.5.



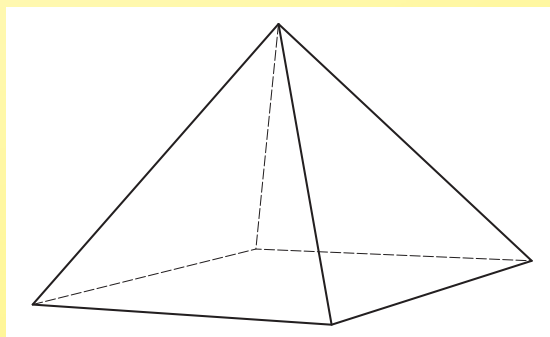
Rys. 10.2



Rys. 10.3

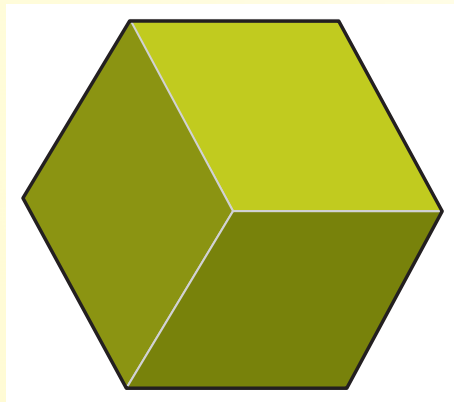


Rys. 10.4



Rys. 10.5

Popatrzmy teraz na nasz dwunastościan w ten sposób, aby widzieć jedynie trzy jego ściany spotykające się w jednym punkcie (rys. 10.6). Wyraźnie widzimy... sześciokąt foremny. Czarne linie na rysunku to nic innego jak sześć widzianych „z profilu” ścian naszej bryły. Pozwala to podejrzewać, że kąt pomiędzy ścianami w dwunastościanie rombowym ma miarę 120° . Tak jest w istocie. Oznacza to, że kąt między ścianą boczną a podstawą w powstałych ostrosłupach ma 60° .

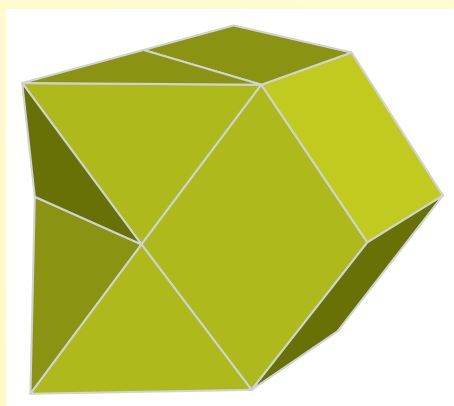


Rys. 10.6



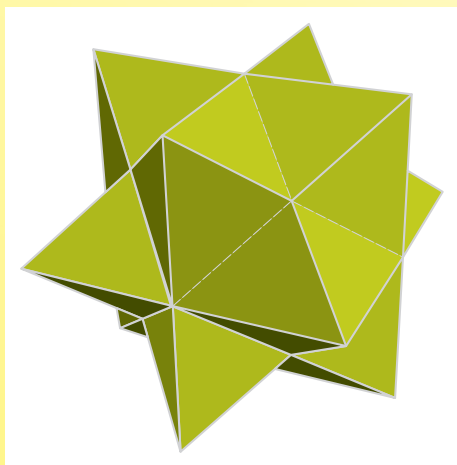
Rys. 10.7

Jeżeli zatem jedną taką piramidkę przykleimy do ściany dwunastościana rombowego, to jej ściany boczne będą leżały w płaszczyznach innych ścian tego dwunastościana (rys. 10.7).



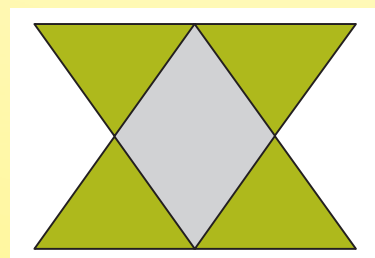
Rys. 10.8

Rysunek 10.8 przedstawia dwunastościan z doklejonymi dwoma piramidkami, a rysunek 10.9 i fot. 10.1 – gotową gwiazdkę.



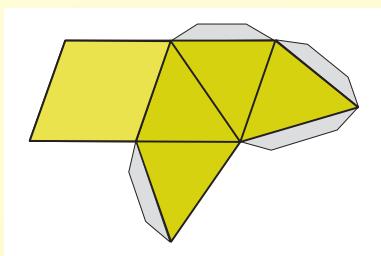
Rys. 10.9

Ma ona dwanaście ścian leżących w płaszczyznach dwunastościana rombowego. Każda z nich składa się z czterech trójkątów dołączonych do ściany wyjściowego dwunastościana (rys. 10.10). Sposób powstania gwiazdki i kształt ścian tłumaczą w pełni jej nazwę.

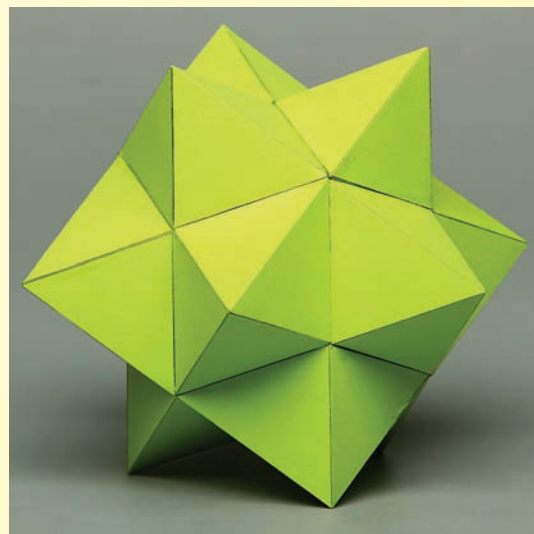


Rys. 10.10

Opisywana wcześniej metoda wykonywania modeli poprzez sklejanie odpowiednich ostrosłupów może być wykorzystana również i tym razem. Siatkę ostrosłupa przedstawia rysunek 10.11. Używając podwójnych skrzydełek, należy skleić ze sobą 12 piramidek, tak aby ich podstawy utworzyły dwunastościan rombowy.



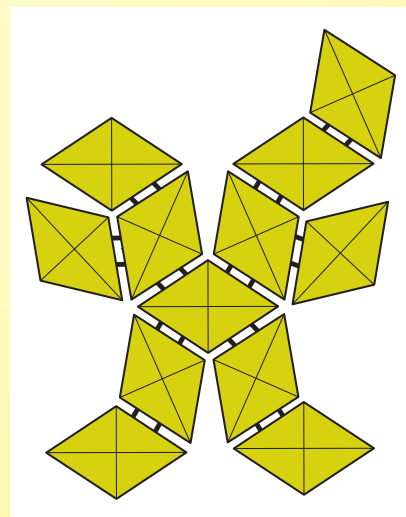
Rys. 10.11



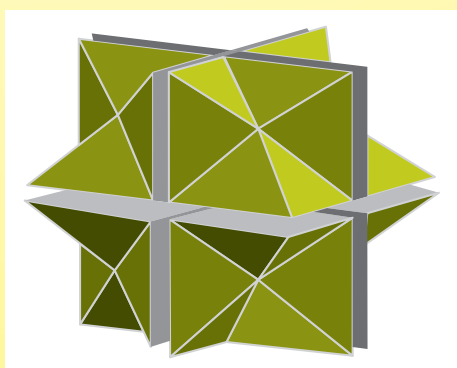
Fot. 10.1

Przy łączeniu piramidek należy pamiętać o dwóch rodzajach wierzchołków dwunastościanu rombowego.

Sposób konstrukcji gwiazdki sugeruje jednak, że można wykonać atrakcyjną zabawkę podobną do opisaną w rozdziale 5. Połączmy wstążeczkami 12 piramidek, tak aby ich podstawy tworzyły siatkę dwunastościanu rombowego. Odstęp między ostrosłupami powinny wynosić ok. 1–2 mm. Gotową zabawkę widzianą z góry przedstawia rysunek 10.12. „Wianuszek piramidek” można zwinąć „do środka”, uzyskując dwunastościan rombowy, bądź też owinać wokół gotowego dwunastościanu, uzyskując gwiazdkę. Należy oczywiście pamiętać, aby podstawy piramidek i ściany dwunastościanu były przystające.



Rys. 10.12

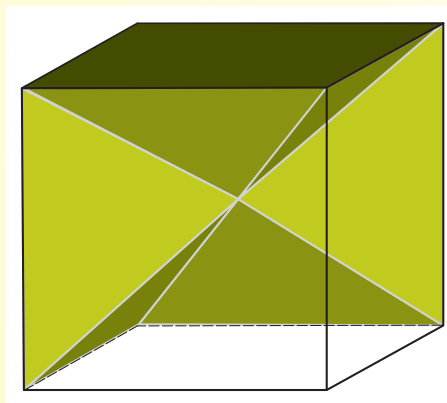


Rys. 10.13

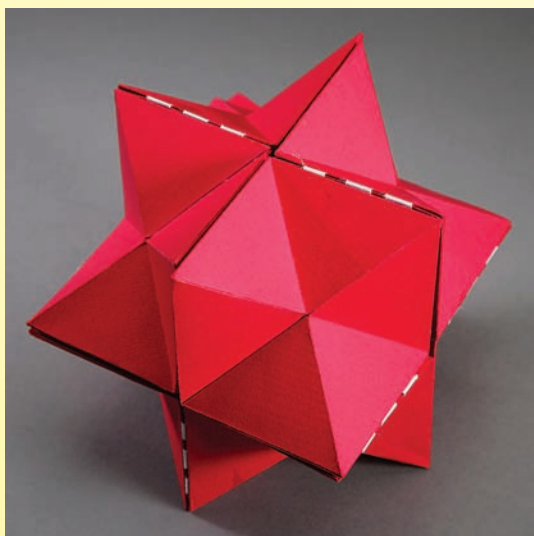
Dwunastościanami rombowymi można wypełnić przestrzeń, tak więc można to również zrobić, używając opisanych gwiazdek. Najlepiej jednak naocznie się o tym przekonać wykonując kilka modeli i zestawiając je ze sobą.

Popatrzmy teraz na dwunastościan gwiazdzisty rombowy z nieco innej strony. Ma on 12 wierzchołków, które leżą po cztery w trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach (rysunek 10.13).

Nasz wielościan przecięty tymi płaszczyznami rozpadnie się na 8 przystających części, z których każda jest... połówką sześcianu (rysunek 10.14). Siatkę jednej części przedstawia rysunek 10.15. Linie przerywane oznaczają krawędzie wklęsłe. Wykonawszy 8 takich elementów, możemy złożyć z nich gwiazdkę lub obłożyć nimi gwiazdkę wykonaną wcześniej. Otrzymamy wówczas sześcian.

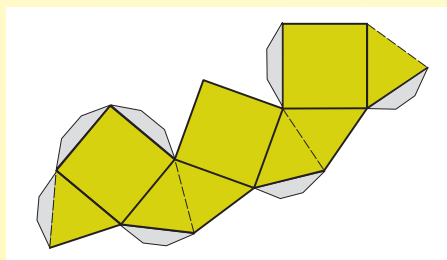


Rys. 10.14

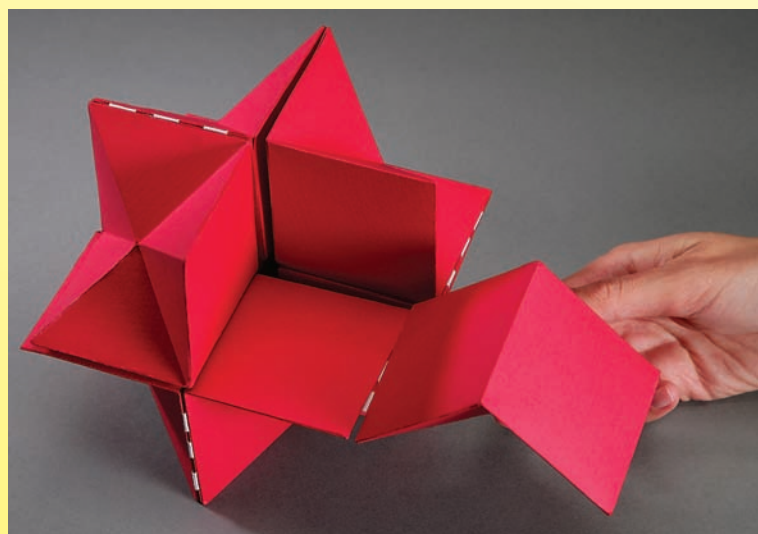


Fot. 10.2

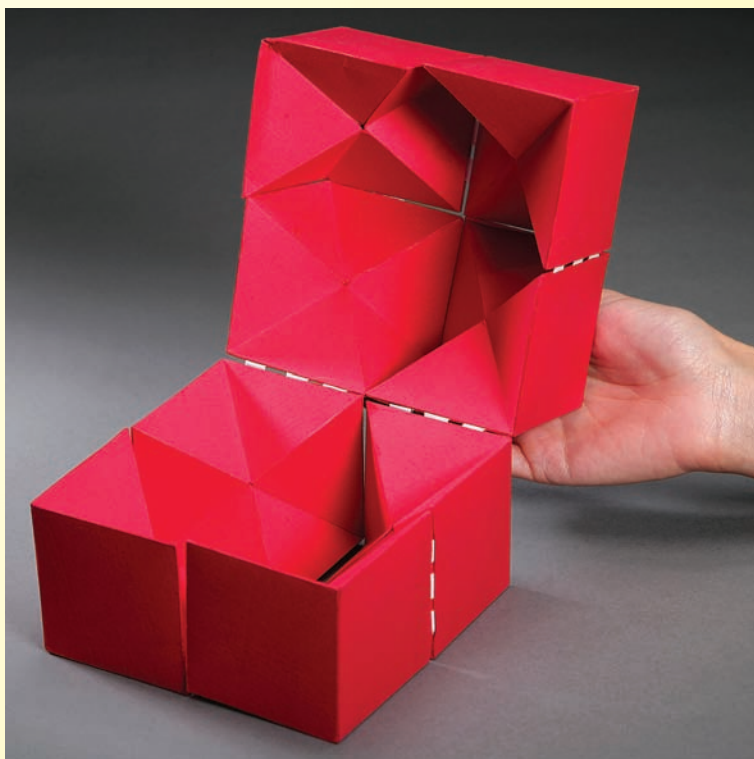
Elementy można również połączyć wstążeczkami w jeden „wianuszek”. Powstanie kolejna atrakcyjna zabawka (fot. 10.2–10.5). Jednakże znalezienie sposobu połączenia jej elementów niech pozostanie (mam nadzieję, że niezbyt trudnym) zadaniem dla Czytelników.



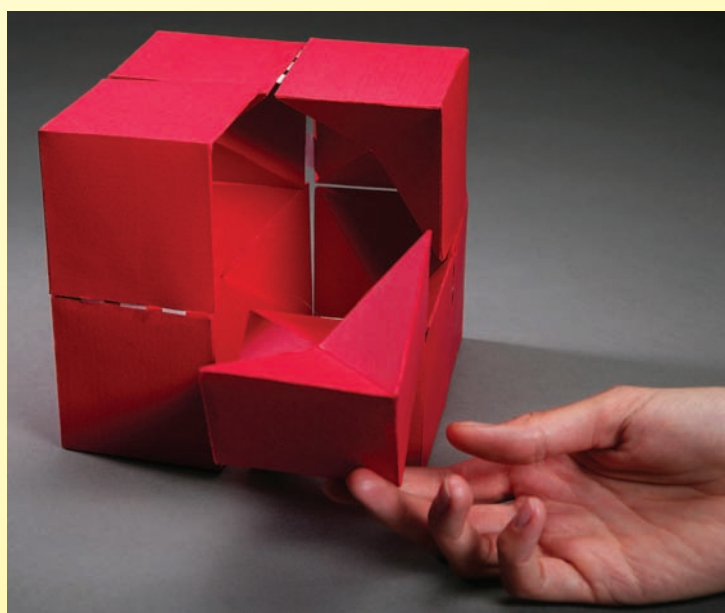
Rys. 10.15



Fot. 10.3



Fot. 10.4



Fot. 10.5

Zadania

1. Co jest wypukleniem opisanej gwiazdki?
2. W jaki sposób można szybko obliczyć jej objętość?
3. Jaki jest związek pomiędzy ścianami bocznymi a podstawami w piramidkach tworzących omawianą gwiazdkę?
4. Ile wynosi miara kąta pomiędzy ścianami piramidki, które zostaną rozdzielone przy cięciu gwiazdki jak na rys. 10.13?

Spis treści

WSTĘP	3
1. Najważniejsze wielościany	5
2. Ścinanie naroży – czyli ARCHIMEDESOWE po raz pierwszy	8
3. STELLA OCTANGULA	14
4. KREWNI STELLI	17
5. OPAKOWANIA	20
6. OPAKOWANIA I INNE ROMBOŚCIANY	24
7. WIELOŚCIANY ROMBOWE (?) – czyli ARCHIMEDESOWE po raz drugi	29
8. DWA (A MOŻE CZTERY?) OSTATNIE – czyli ARCHIMEDESOWE po raz trzeci.	35
9. Gwiazdki z gwiazd dwunastu (1)	39
10. Gwiazdki z gwiazd dwunastu (2).....	43
11. Wielkie wielościany	48
12. ZADASZANIE SZEŚCIANU	53
13. OBRACANIE SZEŚCIANU	56
14. Odbijanie sześcianu	60
15. Ośmiościany	65
16. Czworościiany	70
17. Dwudziestościany	76
Książki, do których warto zajrzeć	80
STRONY, KTÓRE WARTO ODWIEDZIĆ	80
Dodatek	81