

Grzegorz Bryll, Robert Sochacki

Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki

Wydanie drugie, rozszerzone

Opole 2012


Recenzent
Jurij Povstenko

Redaktor
Robert Sochacki

Projekt okładki
Michał Nowik

Text © Copyright by Grzegorz Bryll, Robert Sochacki

Edition © Copyright by Wydawnictwo Nowik Sp.j. 2012

 Wydawnictwo Nowik Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

ISBN 978-83-62687-21-3

Wszelkie prawa zastrzeżone. Rozpowszechnianie bez zgody Wydawcy całości publikacji lub jej fragmentów w jakiegokolwiek postaci jest zabronione.

Kopiowanie metodą kserograficzną, fotograficzną, umieszczanie na nośnikach magnetycznych i optycznych i innych narusza prawa autorskie niniejszej publikacji.

Kserowanie zabija książki!

Wydrukowane w Polsce

Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na www.nowik.com.pl

Dystrybucja:

Wydawnictwo Nowik Sp.j. Biuro Handlowe:

45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Tel./fax 77 454 36 04

<http://www.nowik.com.pl> e-mail: biuro@nowik.com.pl

e-mail: matma@nowik.com.pl

SPIS TREŚCI

OD AUTORÓW	7
Część I. ALGEBRA I ANALIZA MATEMATYCZNA	9
Rozdział 1. CIAŁO UŁAMKÓW PIERŚCIENIA CAŁKOWITEGO	11
Rozdział 2. SPOSOBY KSZTAŁTOWANIA POJĘCIA LICZBY	20
2.1. Liczby naturalne	20
2.1.1. Liczby naturalne jako moce zbiorów skończonych	20
2.1.2. Kształtowanie pojęcia liczby naturalnej za pomocą pojęcia sekwensu (następnika)	21
2.1.3. Liczba naturalna w aspekcie algebraicznym	23
2.1.4. Aspekt miarowy	23
2.2. Liczby całkowite	23
2.2.1. Liczby całkowite jako klasy abstrakcji	23
2.2.2. Aksjomatyczne ujęcie liczb całkowitych	27
2.2.3. Liczby całkowite w szkole	28
2.3. Liczby wymierne	31
2.3.1. Liczby wymierne jako klasy abstrakcji. Interpretacja geometryczna	31
2.3.2. Ułamek jako miara wielkości	33
2.3.3. Liczby wymierne jako operatory	38
2.3.4. Ułamek jako część całości (w ujęciu mnogościowym)	43
2.3.5. Ułamek jako stosunek dwóch wielkości	47
2.3.6. Aksjomatyczne ujęcie liczb wymiernych	48
2.4. Liczby rzeczywiste	49
2.4.1. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych	49
2.4.2. Konstrukcja Dedekinda liczb rzeczywistych	51
2.4.3. Aksjomatyczne ujęcie liczb rzeczywistych	53
2.4.4. Konstrukcja Hoborskiego liczb rzeczywistych	54
2.4.5. Liczby rzeczywiste w szkole	55
2.5. Liczby zespolone	59
2.5.1. Metoda struktury ilorazowej (metoda konstrukcji ciała rozkładu danego wielomianu)	59
2.5.2. Metoda Hamiltona (metoda produktu kartezjańskiego)	61
2.5.3. Metoda macierzowa	62
2.5.4. Metoda algebry liniowej	64
2.5.5. Metoda rozszerzeń ciał	66
2.5.6. Związki między podanymi konstrukcjami	67
2.5.7. Pewien sposób otrzymywania tożsamości hiperbolicznych	68

Rozdział 3.	
DZIAŁANIA ODWROTNE	73
Rozdział 4.	
DWA NIERÓWNOWAŻNE UJĘCIA TEORII WIELOMIANÓW	81
4.1. Ujęcie algebraiczne (ciągowe) wielomianów	81
4.2. Ujęcie funkcyjne wielomianów	84
Rozdział 5.	
CIĄGI ARYTMETYCZNE I CIĄGI GEOMETRYCZNE WYŻSZYCH STOPNI	90
5.1. Ciągi arytmetyczne wyższych stopni	90
5.2. Ciągi geometryczne wyższych stopni	99
5.3. Jednolite ujęcie teorii ciągów arytmetycznych i ciągów geometrycznych wyższych stopni	101
5.4. Sposoby obliczania sumy $\sum_{k=1}^n k^m$	107
5.5. Ciągi arytmetyczne wyższych stopni charakteryzujące liczby figuralne	112
5.5.1. Liczby wielokątne	112
5.5.2. Liczby piramidalne	115
5.5.3. Liczby pryzmalne	117
Rozdział 6.	
RÓWNANIA Z PARAMETREM	122
6.1. Wprowadzenie funkcji stałej	122
6.2. Badanie funkcji w postaci uwikłanej	127
Rozdział 7.	
ZASTOSOWANIE ROZWINIĘĆ SKOŃCZONYCH FUNKCJI DO OBLICZANIA GRANIC	141
Rozdział 8.	
O BŁĘDACH PRZY OBLICZANIU POCHODNEJ FUNKCJI	155
8.1. Obliczanie pochodnej bez wcześniejszego zbadania ciągłości funkcji	155
8.2. Stwierdzanie istnienia pochodnej $f'(x_0)$ na podstawie równości granic $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$	157
8.3. Stwierdzanie nieistnienia pochodnej $f'(x_0)$ na podstawie nieistnienia co najmniej jednej z granic $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$	158
8.4. Wadliwe obliczanie pochodnej funkcji wektorowej argumentu skalarnego	161
Rozdział 9.	
RÓWNANIA REKURENCYJNE I METODY ICH ROZWIĄZYWANIA	163
9.1. Przykłady równań rekurencyjnych	163
9.2. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych liniowych	167
9.2.1. Równania rekurencyjne liniowe jednorodne o stałych współczynnikach	167

9.2.2. Równania rekurencyjne liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach	171
9.3. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych metodą repertuaru	173
9.4. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych metodą czynnika sumacyjnego	181
9.5. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych metodą funkcji tworzących	184
9.5.1. Funkcje tworzące	184
9.5.2. Operacje na funkcjach tworzących	185
9.5.3. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych metodą funkcji tworzących	187
 Rozdział 10.	
WYKORZYSTANIE POJĘCIA ŚRODKA CIĘŻKOŚCI W MATEMATYCE	199
10.1. Obliczanie niektórych sum	200
10.2. Dowodzenie nierówności	206
10.3. Uzasadnianie własności figur płaskich	209
10.4. Obliczanie objętości kuli i pola segmentu paraboli	211
 Część II. GEOMETRIA	219
 Rozdział 11.	
JEDNOLITE UJĘCIE ZAGADNIEŃ DOTYCZĄCYCH OBJĘTOŚCI BRYŁ I PÓŁ FIGUR PŁASKICH	221
11.1. Uogólnienie wzoru Simpsona	221
11.2. Zastosowanie wzoru Simpsona i jego uogólnienia	223
11.3. Pola figur płaskich	226
 Rozdział 12.	
METODA FIGUR RÓWNOWAŻNYCH	228
 Rozdział 13.	
METODY WEKTOROWE ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ DOTYCZĄCYCH ROZTWORÓW, MIESZANIN I STOPÓW	239
13.1. Metoda stężeń	239
13.2. Metoda udziałów	240
13.3. Przykłady	242
 Rozdział 14.	
TWIERDZENIE CEVY I JEGO RÓWNOWAŻNIKI	252
 Rozdział 15.	
AKSJOMATYCZNA DEFINICJA ILOCZYNU WEKTOROWEGO	265
 Część III. LOGIKA	275
 Rozdział 16.	
DYSTRYBUTYWNE I MEREologiczne POJĘCIE ZBIORU	277
 Rozdział 17.	
ZASADA POGLĄDOWOŚCI A TEORIA MODELI	286

Rozdział 18.	
INDUKCJA ZUPEŁNA. WŁASNOŚCI DZIEDZICZNE	299
Rozdział 19.	
DEFINICJE	307
19.1. Rodzaje definicji	307
19.1.1. Definicje normalne	307
19.1.2. Definicje warunkowe	309
19.1.3. Definiowanie przez przypadki	313
19.1.4. Definicje indukcyjne	314
19.1.5. Definicje rekurencyjne	322
19.1.6. Definicje czynnościowe	323
19.2. Konsekwencje przestawiania i pomijania kwantyfikatorów w definicjach	325
19.2.1. Uwagi ogólne	325
19.2.2. Konsekwencje przestawiania kwantyfikatorów w definicjach	327
19.2.3. Konsekwencje pomijania kwantyfikatorów w definicjach	334
19.3. O różnych sposobach definiowania wartości bezwzględnej w szkołach ponadgimnazjalnych	339
19.4. Uwagi o różnych definicjach kresów zbiorów	347
19.5. Definicje okresowości funkcji	358
19.5.1. Okresowość funkcji $f : X \rightarrow R$ w dziedzinie $X (X \subseteq R)$	358
19.5.2. Okresowość funkcji w dziedzinie R	361
19.5.3. Pojęcie okresu zasadniczego	362
Rozdział 20.	
RELACJE BINARNE W ZBIORZE SKOŃCZONYM	365
20.1. Rodzaje relacji i ich liczba	365
20.2. O możliwości wykorzystania relacji porządku i relacji równoważności do definiowania lub utrwalania szkolnych pojęć matematycznych	372
20.2.1. Relacja porządku i kresy zbiorów uporządkowanych	373
20.2.2. Definiowanie za pomocą klas abstrakcji	375
Rozdział 21.	
POJĘCIE KONTRPRZYKŁADU I JEGO ROLA	378
21.1. Pojęcie kontrprzykładu	378
21.2. Kontrprzykłady dla pojęcia granicy	381
21.3. Kontrprzykłady dla pojęcia pochodnej funkcji	385
Rozdział 22.	
DOWODY NIE WPROST	389
Rozdział 23.	
METODY GRAFICZNE SPRAWDZANIA TAUTOLOGII KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ	395
23.1. Diagramy krzyżowe	395
23.2. Diagramy kołowe	401

OD AUTORÓW

Niniejsze opracowanie powstało na podstawie wykładów i ćwiczeń z dydaktyki matematyki prowadzonych przez autorów na Uniwersytecie Opolskim i w Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, a także w oparciu o artykuły o charakterze dydaktycznym zamieszczone w różnych czasopismach.

W pracy omówiono przede wszystkim te zagadnienia, które są pomijane lub wzmiankowane w opracowaniach zwartych. Zdajemy sobie sprawę, że wiele z tych zagadnień wykracza poza ramy dydaktyki matematyki dotyczącej poziomu podstawowego, gimnazjalnego i ponadgimnazjalnego. Wzbogacenie jednak wiedzy nauczycieli i uczniów o mało spopularyzowane metody nauczania niektórych zagadnień matematycznych może przynieść nie tylko korzyści osobiste, ale także uatrakcyjnić samą matematykę szkolną.

Zawartość opracowania podzielono na trzy części: I – algebra i analiza matematyczna, II – geometria, III – logika. Poszczególne rozdziały stanowią na ogół niezależne całości. Z tego też względu po rozdziałach podany został wykaz odpowiedniej literatury. Pozycje literaturowe oznaczone są symbolami [a.b], gdzie a oznacza numer rozdziału, zaś b oznacza numer kolejny w danym rozdziale.

Składamy gorące podziękowania Panu prof. dr hab. Jurijowi Povstence z Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie za cenne i wnikliwe uwagi, które pozwoliły uniknąć wielu usterek i błędów, oraz w sposób istotny przyczyniły się do ostatecznego kształtu książki. Dziękujemy również Panu dr inż. Romanowi Rygałowi za elektroniczne przygotowanie tekstu.

Autorzy będą bardzo wdzięczni za wszelkie uwagi dotyczące opracowania.

Grzegorz Bryll
Robert Sochacki

Część I

**ALGEBRA I ANALIZA
MATEMATYCZNA**

ROZDZIAŁ 1.

CIAŁO UŁAMKÓW PIERŚCIENIA CAŁKOWITEGO

Przypomnijmy, że układ $(P, +, \cdot)$, gdzie $P \neq \emptyset$, jest pierścieniem, gdy spełnione są warunki:

1. Układ $(P, +)$ jest grupą abelową.
2. Działanie „ \cdot ” jest obustronnie rozdzielne względem działania „ $+$ ”.

W definicji pierścienia nie zakładamy, że działanie „ \cdot ” jest łączne. Element neutralny grupy $(P, +)$ nazywamy zerem pierścienia i oznaczamy go przez 0.

Jeśli w pierścieniu P działanie „ \cdot ” spełnia warunki:

- a) $\forall_{a, b, c \in P} [a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c]$
- b) $\forall_{a, b \in P} [a \cdot b = b \cdot a]$
- c) $\exists_{c \in P} \forall_{a \in P} [a \cdot c = c \cdot a = a]$
- d) $\forall_{a, b \in P} [a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0]$

to pierścień P nazywamy odpowiednio: pierścieniem łącznym, pierścieniem przemiennym, pierścieniem z jednością, pierścieniem bez dzielników zera.

Pierścieniem całkowitym nazywamy pierścień łączno-przemienny bez dzielników zera. Pierścień całkowity może więc nie posiadać jedności.

Pierścień P z jednością nazywamy ciałem, gdy spełnione są warunki:

- e) $\overline{P} \geq 2$
- f) $\forall_{a, b \in P} \left[a \neq 0 \Rightarrow \exists_1_{c \in P} (a \cdot c = b) \right]$
- g) $\forall_{a, b \in P} \left[a \neq 0 \Rightarrow \exists_1_{c \in P} (c \cdot a = b) \right]$

W definicji ciała nie zakładamy, że działanie „ \cdot ” jest łączne i przemienne [1.4]. Ciało łączne P można scharakteryzować następująco:

1. P jest pierścieniem,
2. $\overline{P} \geq 2$,
3. $(P \setminus \{0\}; \cdot)$ jest grupą.

Konstrukcja ciała ułamków dla danego pierścienia całkowitego przedstawia się następująco¹:

Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem całkowitym i niech

$$P^* = \{ \langle a, b \rangle : a, b \in P \wedge b \neq 0 \}$$

W zbiorze P^* określamy relację R oraz działania \oplus i \odot , przyjmując definicje:

Definicja 1.1.

$$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Definicja 1.2.

$$\text{a) } \langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d \rangle$$

$$\text{b) } \langle a, b \rangle \odot \langle c, d \rangle = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle$$

Relacja R określona przez definicję 1.1 jest relacją typu równoważności, a więc jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Można więc tworzyć klasy abstrakcji i zbiór ilorazowy P^*/R :

$$P^*/R = \left\{ \alpha : \exists_{\langle a, b \rangle \in P^*} (\alpha = [\langle a, b \rangle]_R) \right\}$$

Łatwo sprawdzić, że relacja R jest zgodna z działaniami \oplus i \odot , tzn. dla dowolnych $\langle a, b \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle \in P^*$ spełniony jest warunek [1.4]:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \wedge \langle a_1, b_1 \rangle R \langle c_1, d_1 \rangle &\Rightarrow (\langle a, b \rangle \oplus \langle a_1, b_1 \rangle) R (\langle c, d \rangle \oplus \langle c_1, d_1 \rangle) \wedge \\ &\wedge (\langle a, b \rangle \odot \langle a_1, b_1 \rangle) R (\langle c, d \rangle \odot \langle c_1, d_1 \rangle) \end{aligned}$$

Relacja R jest więc kongruencją w zbiorze P^* . Generuje ona w zbiorze P^*/R działania \boxplus i \boxdot określone następująco:

Definicja 1.3.

$$\text{a) } [\langle a, b \rangle]_R \boxplus [\langle c, d \rangle]_R = [\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle]_R$$

$$\text{b) } [\langle a, b \rangle]_R \boxdot [\langle c, d \rangle]_R = [\langle a, b \rangle \odot \langle c, d \rangle]_R$$

¹ Pomijamy w tej konstrukcji pierścień jednoelementowy, składający się z samego zera.

Twierdzenie 1.1.

Zbiór P^*/R z działaniami \boxplus i \boxminus jest ciałem łączno-przemienne².

Ciało $(P^*/R, \boxplus, \boxminus)$ nazywamy ciałem ułamków danego pierścienia całkowitego $(P, +, \cdot)$. Element $[\langle a, b \rangle]_R$ należący do P^*/R będziemy zapisywać w postaci $\frac{a}{b}$ i nazywać ułamkiem. Mamy więc:

$$\frac{a}{b} \boxplus \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \boxminus \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Elementem neutralnym działania \boxplus jest ułamek $\frac{0}{b}$, elementem neutralnym działania \boxminus jest ułamek $\frac{b}{b}$, elementem przeciwnym do ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{-a}{b}$, ($b \in P \wedge b \neq 0$), zaś elementem odwrotnym do ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$, (o ile $a \neq 0$).

Wykażemy, że ciało ułamków $(P^*/R, \boxplus, \boxminus)$ zawiera podpierścień izomorficzny z pierścieniem P . Niech więc P_1 będzie zbiorem wszystkich ułamków postaci $\frac{a \cdot b}{a}$, gdzie $a \neq 0$. Funkcją ustalającą izomorfizm pomiędzy pierścieniami P_1 i P jest funkcja $\varphi: P_1 \rightarrow P$ określona wzorem $\varphi\left(\frac{a \cdot b}{a}\right) = b$.

Istotnie funkcja φ jest bijekcją i ponadto spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a \cdot b}{a} \boxplus \frac{a \cdot c}{a}\right) &= \varphi\left(\frac{a^2 \cdot b + a^2 \cdot c}{a^2}\right) = \varphi\left(\frac{a \cdot (b + c)}{a}\right) = b + c = \\ &= \varphi\left(\frac{a \cdot b}{a}\right) + \varphi\left(\frac{a \cdot c}{a}\right) \end{aligned}$$

² Dowód można znaleźć w pracy [1.4].

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{a \cdot b}{a} \boxplus \frac{a \cdot c}{a}\right) &= \varphi\left(\frac{(a \cdot b) \cdot (a \cdot c)}{a^2}\right) = \varphi\left(\frac{a^2 (b \cdot c)}{a^2}\right) = \varphi\left(\frac{a \cdot (b \cdot c)}{a}\right) = b \cdot c = \\ &= \varphi\left(\frac{a \cdot b}{a}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a \cdot c}{a}\right)\end{aligned}$$

Przykład 1.1.

Ciałem ułamków dla pierścienia liczb całkowitych $(Z, +, \cdot)$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia, jest ciało liczb wymiernych $(Z^*/R, \boxplus, \boxminus)$, $(Z^*/R = Q)$. Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem Z jest pierścień (Q, \boxplus, \boxminus) ułamków postaci $\frac{a \cdot b}{a}$, gdzie $a, b \in Z$ i $a \neq 0$.

Przykład 1.2.

Ciałem ułamków dla pierścienia wielomianów $(K[x], +, \cdot)$ nad ciałem łączno-przemienne K jest ciało funkcji wymiernych $(K^*[x]/R, \boxplus, \boxminus)$, tj. ciało ułamków postaci $\frac{f}{g}$, gdzie f, g są wielomianami (zmiennej x) i g nie jest wielomianem zerowym.

Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem $K[x]$ jest pierścień $(K_1, \boxplus, \boxminus)$ funkcji wymiernych postaci $\frac{f \cdot g}{f}$, gdzie f, g są wielomianami i f nie jest wielomianem zerowym.

Przykład 1.3.

Ciało operatorów Mikusińskiego

Rozważmy układ $(M, +, *)$, gdzie M jest zbiorem wszystkich funkcji klasy C^1 określonych w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb zespolonych³, zaś działanie dodawania funkcji „+” i działanie „splotu” funkcji „*” są określone następująco:

$$\begin{aligned}h = f + g &\Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} [h(t) = f(t) + g(t)] \\ h = f * g &\Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} \left[h(t) = \int_0^t f(t-x) \cdot g(x) dx \right]\end{aligned}$$

³ Można też brać pod uwagę zbiór M funkcji klasy C (zob. [1.6]) bądź też zbiór funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue’a (zob. [1.8]).

Można wykazać, że [1.5, 1.6]:

Twierdzenie 1.2.

Układ $(M, +, *)$ jest pierścieniem łączno-przemiennym bez dzielników zera i bez jedności.

Pierścień $(M, +, *)$ nazywamy pierścieniem Mikusińskiego.

Rozważmy z kolei układ (M^*, \oplus, \odot) , gdzie $M^* = M \times (M \setminus \{0\})^4$, zaś relacja R i działania \oplus, \odot określone są następująco:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle R \langle f_1, g_1 \rangle &\Leftrightarrow f * g_1 = g * f_1 \\ \langle f, g \rangle \oplus \langle f_1, g_1 \rangle &= \langle f * g_1 + g * f_1, g * g_1 \rangle \\ \langle f, g \rangle \odot \langle f_1, g_1 \rangle &= \langle f * f_1, g * g_1 \rangle\end{aligned}$$

Kongruencja R generuje w zbiorze ilorazowym M^*/R działania \boxplus, \boxminus określone wzorami:

$$\frac{f}{g} \boxplus \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * g_1 + g * f_1}{g * g_1}, \quad \frac{f}{g} \boxminus \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * f_1}{g * g_1}$$

Ciało ułamków $(M^*/R, \boxplus, \boxminus)$ nazywamy ciałem operatorów Mikusińskiego, zaś elementy zbioru M^*/R nazywamy operatorami. Operatorami są więc klasy abstrakcji wyznaczone przez relację R i pary uporządkowane postaci (f, g) , gdzie $f, g \in M$ i $g \neq 0$.

Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem Mikusińskiego M jest pierścień $(M_1, \boxplus, \boxminus)$, gdzie

$$M_1 = \left\{ \alpha \in M^*/R : \exists_f \left(\alpha = \frac{f * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \right) \right\}$$

Z tego względu operatory postaci $\frac{f * \mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ utożsamia się często z funkcjami.

Ciało operatorów $(M^*/R, \boxplus, \boxminus)$ zawiera następujące podciało M_0 izomorficzne z ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} :

⁴ Funkcję stałą a określamy wzorem $a(t) = a$ dla $t \in (0, +\infty)$.

$$M_0 = \left\{ \alpha \in M^* / R : \exists_{a \in \mathbb{C}} \left(\alpha = \frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \right) \right\}^5$$

Izomorfizm pomiędzy ciałami $(M_0, \boxplus, \boxminus), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ustala funkcja $\psi : M_0 \rightarrow \mathbb{C}$ o własności: $\psi\left(\frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}}\right) = a$. Z uwagi na powyższy izomorfizm operatory postaci $\frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ można utożsamiać z liczbami zespolonymi.

Dla przykładu iloczyn funkcji stałych **2** i **3** oraz iloczyn liczb 2 i 3 wynoszą odpowiednio:

$$2 \cdot 3 = \frac{2 * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \boxminus \frac{3 * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{(2 * \mathbf{1}) * (3 * \mathbf{1})}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(2 * 3) * \mathbf{1} * \mathbf{1}}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(2 * 3) * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 2 * 3 = 6 * \mathbf{1}^6$$

$$2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \boxminus \frac{3 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{(2 \cdot \mathbf{1}) * (3 \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{[(2 \cdot 3) \cdot \mathbf{1}] * \mathbf{1}}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(2 \cdot 3) \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Ciało operatorów można skonstruować również w następujący sposób. W zbiorze M , oprócz działania „+”, określamy działanie „ \circ ” (mnożenie funkcji) następująco:

$$h = f \circ g \Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} \left[h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-x) \cdot g(x) dx \right]$$

Można wykazać (zob. [1.1, 1.7]), że układ $(M, +, \circ)$ jest pierścieniem łączno-przemienne z jednością, bez dzielników zera. Jednością tego pierścienia jest funkcja stała **1**. Można więc w znany sposób skonstruować ciało ułamków dla tego pierścienia.

Pierścień $(M, +, \circ)$ różni się istotnie od pierścienia $(M, +, *)$, bowiem w tym ostatnim brak jest elementu neutralnego dla działania „*”. Pierścienie te nie są więc izomorficzne, posiadają jednak wspólne ciało ułamków (zob. [1.3]).

Zauważmy przy okazji, że istnieją pierścienie całkowite izomorficzne o tym samym uniwersum, które nie posiadają wspólnego ciała ułamków. Takimi pierścieniami są pierścień liczb całkowitych $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ze zwykłymi działaniami do-

⁵ Iloczyn funkcji f przez liczbę zespoloną a określamy następująco:

$$h = a \cdot f \Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} [h(t) = a \cdot f(t)]$$

⁶ Symbolem t oznaczamy funkcję liniową o własności: $t(t) = t$ dla $t \in \langle 0, +\infty \rangle$.

dawania i mnożenia oraz pierścieni liczb całkowitych (Z, \oplus, \odot) , gdzie działania \oplus, \odot określone są następująco:

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \odot b = a + b + a \cdot b$$

Izomorfizmem jest tutaj funkcja $\Phi : Z \rightarrow Z$ określona wzorem

$$\Phi(a) = a + 1$$

Wynik dotyczący istnienia wspólnego ciała operatorów Mikusińskiego dla dwóch nieizomorficznych pierścieni całkowitych nad tym samym uniwersum można uogólnić następująco (zob. [1.2]):

Twierdzenie 1.3.

Pierścienie całkowite $(A, +, \cdot), (A, +, \circ)$ o tej samej grupie addytywnej $(A, +)$ mają wspólne ciało ułamków wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$(I) \quad \exists_{\alpha, \beta \in A, \alpha \neq 0, \beta \neq 0} \left\{ \forall_{a, b \in A} [\alpha \cdot (a \circ b) = \beta \cdot a \cdot b] \vee \forall_{a, b \in A} [\alpha \circ a \circ b = \beta \circ (a \cdot b)] \right\}$$

Jeśli $\beta = \lambda \cdot a$ lub $\alpha = \lambda \circ \beta$ (gdzie $\lambda \in A$), to warunek (I) przyjmuje postać:

$$(II) \quad \exists_{\lambda \in A, \lambda \neq 0} \left[\forall_{a, b \in A} (a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b) \vee \forall_{a, b \in A} (a \cdot b = \lambda \circ a \circ b) \right]$$

Wniosek 1.1.

Jeżeli w pierścieniu całkowitym $(A, +, \cdot)$ działanie „ \circ ” określone jest następująco:

$$a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b \quad (a, b \in A) \tag{1.1}$$

gdzie λ jest ustalonym elementem zbioru A , różnym od 0, to:

- (a) układ $(A, +, \circ)$ jest pierścieniem całkowitym,
- (b) pierścienie $(A, +, \cdot), (A, +, \circ)$ mają wspólne ciało ułamków.

Wzór (1.1) zachodzi na przykład w pierścieniu całkowitym, służącym do konstrukcji ciała operatorów Mikusińskiego. Istotnie, jeśli w zbiorze funkcji klasy C^1 , określonych w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb zespolonych, zdefiniowano działania „+”, „*”, „ \circ ” wzorami:

$$h = f + g \Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} [h(t) = f(t) + g(t)]$$

$$h = f * g \Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} \left[h(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx \right]$$

$$h = f \circ g \Leftrightarrow \forall_{t \geq 0} \left[h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-x)g(x)dx \right]$$

to $f * g = \lambda \circ f \circ g$, gdzie $f, g, \lambda \in C^1$ i $\lambda(t) = t$ dla dowolnego $t \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Zauważmy jeszcze, że warunek (I) może zachodzić również dla pierścieni całkowitych o tej samej grupie addytywnej, w których żadne z działań „mnożenia” nie jest definiowalne przez pozostałe. Na przykład: jeśli w pierścieniu $(Z, +, \cdot)$ liczb całkowitych ze zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem określimy działania Δ i ∇ następująco:

$$a \Delta b = \lambda_1 \cdot a \cdot b, \quad a \nabla b = \lambda_2 \cdot a \cdot b$$

(gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in Z$) i żadna z liczb całkowitych λ_1, λ_2 nie jest wielokrotnością drugiej, to w pierścieniach całkowitych $(Z, +, \Delta), (Z, +, \nabla)$ dla działań Δ, ∇ zachodzą związki:

$$\lambda_2 \nabla(a \Delta b) = \lambda_1 \nabla(a \nabla b)$$

$$\lambda_1 \Delta(a \nabla b) = \lambda_2 \Delta(a \Delta b)$$

Spełniony jest więc warunek (I).

Pierścień liczb całkowitych $(Z, +, \cdot)$ ze zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem ma następującą własność specyficzną (zob. [1.2]):

Twierdzenie 1.4.

Jeżeli w pierścieniu $(Z, +, \cdot)$ działanie „ \circ ” jest definiowalne przez działania tego pierścienia i układ $(Z, +, \circ)$ jest pierścieniem całkowitym, to zachodzi warunek:

$$(III) \quad \exists_{\substack{\lambda \in Z \\ \lambda \neq 0}} \forall_{a, b \in Z} [a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b]$$

Literatura

- [1.1] Berg L., *Einführung in die Operatorenrechnung*, Berlin 1962.
- [1.2] Bryll G., Blidia M., *O ciałach ułamków pierścieni całkowitych*, ZN WSP w Opolu, Matematyka 1990, nr 27, s. 79-86.
- [1.3] Bryll G., Oniszczuk R., *Sposoby konstrukcji ciała operatorów Mikusińskiego*, ZN WSI w Opolu, Problematyka różna 1972, z. 2, s. 3-15.
- [1.4] Gleichgewicht B., *Elementy algebry abstrakcyjnej*, Biblioteczka Matematyczna, PZWS, Warszawa 1966, nr 24.
- [1.5] Mikusiński J., *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 1950, nr 11, s. 41-70.

- [1.6] Mikusiński J., *Rachunek operatorów*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1957.
- [1.7] Rajewski M., *Berechnung der Einschaltvorgänge in linearen Schaltungen mittels "abgeschnittener" Functionen*, *Wiss. Z. Hochsch. f. Elektrotechnik (Ilmenau)* 1958, nr 4, s. 143-165.
- [1.8] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste*, t. II, PWN, Warszawa 1959.