Spis treści

Wstęp 5
Origami – trysekcja kąta 7
Geometryczne przekładanki 11
Kwadraty mniej magiczne 17
Twierdzenie Kopernika 25
Szwedzki samotnik 32
O problemie Frobeniusa 39
Kłopotliwe łamane 48
„Pickne” twierdzenie 57
Totalne permutacje 66
O problemie Bernoulliego-Eulera-Montmorta 71
Tonący sześcian 77
Kalkulator – ułamkowy Sherlock Holmes 82
Gra z komórki 92
Przypisy 99
Matematyczne projekty 115

Wstęp

W 1996 roku redakcja czasopisma *NiM* (*Nauczyciele i Matematyka*) zaprosiła mnie do współpracy, oddając kilka swoich stron dla działu „Wszystkie twierdzenia małe i duże”. Matematyczny serial wystartował w osiemnastym numerze *NiM-a* (lato 1996). Do 2003 roku ukazało się 13 odcinków. Cieszę się, że mogę te matematyczne opowieści zaprezentować w niniejszej książce. Jej zasadniczą częścią są artykuły z *NiM-a*, ale niektóre ich fragmenty zostały dość istotnie zmodyfikowane i wzbogacone. Dodałem także przypisy.

Myśląc o Czytelniku, chciałbym podkreślić, że zależy mi, aby książką zainteresowali się nauczyciele matematyki i informatyki, którzy mogliby jej fragmenty wykorzystać w czasie lekcji, na zajęciach kółka matematycznego lub jako tematy do pracy z uczniami metodą projektu (plany takich projektów znajdują się w ostatnim rozdziale). Sprawiłoby mi też dużo radości, gdyby sięgnęli po nią uczniowie. W książce nie ma zadań egzaminacyjnych i tylko niekiedy poruszam tematy dotyczące tzw. szkolnej matematyki, ale głęboko wierzę, że uczenie się matematyki w szkole nie sprowadza się wyłącznie do sprawdzianu po szóstej klasie, egzaminu po gimnazjum i matury.

Mam także nadzieję, że studenci matematyki, matematycy profesjonaliści i każdy, kto choć odrobinę czuje się miłośnikiem matematyki, znajdzie w mojej książce coś ciekawego.

W pierwszym odcinku „Wszystkich twierdzeń małych i dużych” (*NiM* nr 18) napisałem słowa, które dobrze charakteryzują zawartość książki: „Twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie Talesa, twierdzenia sinusów, cosinusów, …, dziesiątki, setki twierdzeń matematyki elementarnej. Później pojawiają się m.in. twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, kryterium Eisensteina. Przez lata poznajemy wiele twierdzeń, ale, używając dziennikarskiego określenia, są one z „pierwszych stron gazet”. Takie matematyczne giganty będą ukazywały się w tym dziale rzadko. Chciałbym natomiast jak najczęściej przedstawiać w *NiM* interesujące fakty, małe, urokliwe twierdzenia, zaskakujące rezultaty z różnych dziedzin matematyki. Zależy mi na tym, aby Czytelnicy poczuli czar małych twierdzeń".

Tytuł książki jest zapożyczeniem. Miłośnicy beletrystyki weterynaryjnej znają na pewno nazwisko Jamesa Herriota, który napisał wiele pełnych uroku książek o zwierzętach (wydał je pod wspólnym tytułem „Wszystkie stworzenia małe i duże"). Herriot, mieszkający w małym miasteczku weterynarz, z ogromną pasją opisuje swoją pracę. Wędrując z nim po angielskiej prowincji, poznajemy ciekawe historie jego małych i dużych pacjentów.

Zapraszam Państwa do wspólnej wędrówki po matematycznych prowincjach.

Piotr Zarzycki

Gdynia, luty–kwiecień 2005

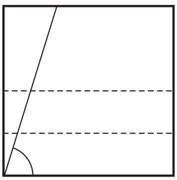
Podziękowania

Kilka osób przyczyniło się do powstania tej książki. Chciałbym wyrazić im moją głęboką wdzięczność.

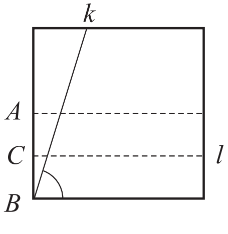
Panu Markowi Legutce dziękuję za gościnność na łamach *NiM-a*, za wiele cennych uwag. Panu Wacławowi Zawadowskiemu jestem wdzięczny za mobilizowanie mnie do pisania kolejnych odcinków „Wszystkich twierdzeń małych i dużych". Ostatnim, bardzo wymagającym Czytelnikom maszynopisu, Pani Agnieszce Orzeszek i Panu Wiktorowi Bartolowi, wyrażam ogromną wdzięczność za trud czytania, poprawiania i dyskutowania o tekście książki. Ich uwagi w istotny sposób wpłynęły na pracę nad tym tekstem i na jego ostateczny kształt.

ORIGAMI – TRYSEKCJA KĄTA

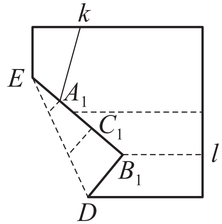
Origami to wywodząca się z Japonii sztuka zginania kartki, dzięki której można otrzymać różne figury geometryczne (płaskie, przestrzenne). Natomiast **trysekcja kąta** to słynny problem starożytnych matematyków o podziale dowolnego kąta na trzy równe części za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki. Do momentu przeczytania artykułu Thomasa Hulla *A Note on „Impossible” Paper Folding* (The American Mathematical Monthly, v. 103, nr 3, 1996) o tym, jak podzielić dowolny kąt na trzy równe części, zginając odpowiednio kartkę, mój stosunek do origami określiłbym jako wstrzemięźliwy. O origami myślałem jako o sympatycznej, ale matematycznie niezbyt ekscytującej zabawie. Teraz zmieniłem zdanie, głównie dzięki origami – trysekcji, która jest bardzo prosta (jej autorstwo Hull przypisuje Japończykowi Hisaschi Abe). Oto ta „konstrukcja” dla kąta ostrego:



Dowolny kąt ostry umieszczamy w kwadracie. Kwadrat zginamy w połowie i w jednej czwartej.



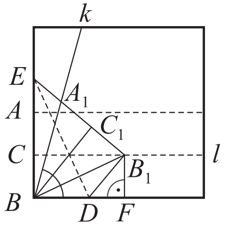
Kartkę zginamy tak, aby punkt A znalazł się na prostej k, a punkt B na prostej l.



Zaznaczamy punkt C_1, który wyznacza szukaną trysekcję. Punkt A znalazł się w położeniu A_1, punkt B w B_1, punkt C w C_1.

Czytelnik z pewnością zauważy, że złożenie kartki opisane pod środkowym rysunkiem powyżej jest możliwe.

Uzasadnienie poprawności konstrukcji

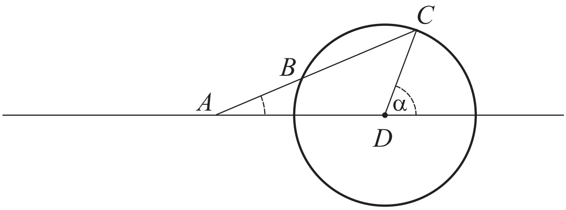


Odcinek BC_1 wyznacza szukany podział kąta na trzy równe części. Dlaczego tak jest?
Trójkąty A_1BC_1 oraz BB_1C_1 są przystające, gdyż są prostokątne i $|A_1C_1| = |B_1C_1|$.
Zatem $\angle A_1BC_1 = \angle C_1BB_1 = \beta$.
Ponadto trójkąty BB_1C_1 oraz BFB_1 są przystające (dlaczego?). Stąd $\angle B_1BF = \beta$.

Informacje

1. Trysekcja dowolnego kąta za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki nie jest możliwa, w ten sposób nie można na przykład podzielić kąta 60°.

2. Znanych jest wiele nieklasycznych trysekcji kąta (nieklasycznych, tzn. takich, które nie ograniczają się do użycia cyrkla i linijki bez podziałki). Do najpiękniejszych należy konstrukcja Archimedesa:

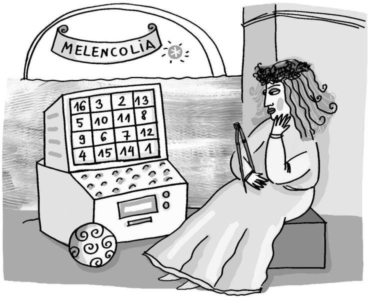


W półokręgu o promieniu r znajduje się kąt środkowy α. Na linijce zaznaczamy dwa punkty w odległości r. Przykładamy ją w punkcie C tak, aby odcinek AB miał długość r. Można sprawdzić, że

$$\angle DAB = \frac{\alpha}{3}.$$

3. Istnieją origami-aksjomaty geometrii[1] (patrz przypisy). Udowodniono, że każda konstrukcja geometryczna, której wykonanie jest możliwe przy wykorzystaniu tych aksjomatów jest też wykonalna za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki, ale nie na odwrót. Trzeba tutaj podkreślić, że wśród origami-aksjomatów nie ma wykorzystanej w opisanej na stronie 7 origami-trysekcji możliwości przenoszenia dwóch punktów na dwie proste (w trysekcji tej punkty A i B zostały przeniesione na proste k i l odpowiednio).

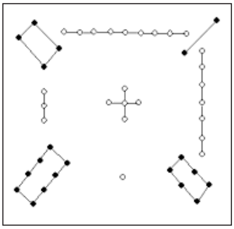
KWADRATY MNIEJ MAGICZNE



Kiedy przeglądam różne podręczniki i zeszyty ćwiczeń do matematyki, na ogół znajduję w nich kwadraty magiczne. Nie tylko zresztą tam; kilkanaście lat temu w czasie wizyty w Linköping (Szwecja) podczas wykładu z nauczania matematyki na tablicy pojawił się kwadrat magiczny. Kiedyś natknąłem się na numer specjalny węgierskiego czasopisma ,,KöMaL” (lipiec 96) i tam poświęcono wiele miejsca kwadratom magicznym. Epidemia? Magia? Do tytułu tej części nawiązuje rysunek – impresja na temat słynnej ,,Melancholii” Albrechta Dürera.

Klasyczne kwadraty magiczne

Kwadraty magiczne znane są od dawna. Najstarsza wzmianka o nich pochodzi z V wieku p.n.e. Ten pierwszy znany kwadrat magiczny przedstawiamy poniżej (po lewej stronie); jest to tzw. kwadrat Lo Shu.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Cóż to zatem jest kwadrat magiczny? Jest to kwadratowa tabliczka o wymiarze $n \times n$ z wpisanymi liczbami 1, 2, … aż do n^2 w taki sposób, że sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych są takie same. O takich kwadratach będziemy dodatkowo mówić **klasyczne**. Klasyczne kwadraty magiczne istnieją dla każdego $n = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$

O metodach ich konstruowania można przeczytać w pięknej książce Szczepana Jeleńskiego *Lilavati*. Niektóre sposoby budowania kwadratów magicznych to … „magia” i naprawdę bardzo ciekawa matematyka.

Spróbujemy teraz wyjaśnić fenomen wielkiej popularności kwadratów magicznych. Po pierwsze – sformułowanie problemu, bardzo proste, zrozumiałe dla laika (pewnie dlatego kwadratami magicznymi zajmują się dzieci już w pierwszych klasach szkoły podstawowej); po drugie – mamy tu tylko dodawanie, najprostsze z czterech podstawowych działań arytmetycznych. A więc problem i ciekawy, i łatwy w sformułowaniu. Ale to nie koniec; przecież konstrukcja klasycznego kwadratu magicznego 3×3 (będziemy też używać określenia stopnia trzeciego) to przykład:

a) dowodu matematycznego,

b) pracy metodą prób i błędów,

c) różnorodności rozwiązań (metoda prób i błędów, dowód kombinatoryczny, rozwiązanie przy pomocy układu równań, zabawny „dowód magiczny”: w środku kwadratu powinna być liczba 5, bo wśród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta właśnie liczba jest pośrodku),

d) łatwego uogólniania problemu (zamiast liczb mogą pojawić się wielomiany, wyrażenia algebraiczne).

Ale to jeszcze nie koniec dydaktycznych zalet kwadratów magicznych. Nieistnienie klasycznego kwadratu magicznego stopnia drugiego (2×2) to przykład prostego dowodu nie wprost. A co z innymi figurami? Czy istnieją magiczne trójkąty, pięciokąty, sześciokąty, sześciany, ...? Jak je zdefiniować? Mnóstwo pytań i ciekawych zadań.

Kwadraty „mniej magiczne”

Zajmować się będziemy kwadratami magicznymi, których elementami mogą być dowolne liczby rzeczywiste (nazywiemy je żartobliwie **mniej magicznymi**). Liczby w kwadratach mniej magicznych mogą się powtarzać. W trakcie badania kwadratów mniej magicznych pojawi się ważne twierdzenie z algebry liniowej dotyczące układów równań liniowych, bowiem poszukiwanie kwadratów mniej magicznych danego stopnia sprowadza się do rozwiązywania układów równań liniowych.

Zacznijmy od kwadratów magicznych stopnia drugiego (mniej magicznych). Szukając postaci ogólnej takiego kwadratu z zadaną sumą s, otrzymujemy układ 6 równań liniowych z czterema niewiadomymi:

x_1	x_2
x_3	x_4

$$(*) = \begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_3 + x_4 = s \\ x_1 + x_3 = s \\ x_2 + x_4 = s \\ x_1 + x_4 = s \\ x_2 + x_3 = s \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że przy danym s powyższy układ ma tylko jedno rozwiązanie:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{s}{2}$$

$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$
$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$

Jaka będzie postać ogólna kwadratu mniej magicznego stopnia trzeciego (3×3) z zadaną sumą s?

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Szukając tej postaci, otrzymujemy 8 równań liniowych z 9 niewiadomymi.