

Dorota Nowak, Ewa Sygulla, Jerzy Nowik, Tomasz Szwed, Stanisław Zieleń

**Program nauczania matematyki
w uzupełniającym liceum
i technikum uzupełniającym**
Matematyka bliżej nas

Program zgodny z Podstawą programową z dnia 23 sierpnia 2007 r.

Opole 2008

Autorzy: *Dorota Nowak, Ewa Sygulla, Jerzy Nowik, Tomasz Szwed, Stanisław Zieleń*

Program nauczania matematyki w uzupełniającym liceum i technikum uzupełniającym. *Matematyka bliżej nas*

Program jest dopuszczony do użytku szkolnego na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. Macieja Bryńskiego – rekomendacja Uniwersytet Warszawski
i mgr. Marka Sadowskiego – rekomendacja Minister Edukacji Narodowej.

Numer dopuszczenia: DKOS-5002-37/05

Program zgodny z Podstawą programową z dnia 23 sierpnia 2007 r.

ISBN 978-83-89848-29-1

© Copyright by Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
Opole 2008

Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
Opole 2008

Wydanie drugie

Dystrybucja: Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK Sp.j.
45-061 Opole, ul. Katowicka 39 p. 110, tel./fax: (0-77) 454 36 04
www.nowik.com.pl e-mail: matma@nowik.com.pl

Program nauczania matematyki w uzupełniającym liceum i technikum. *Matematyka bliżej nas*

Opracowany pod redakcją *Jerzego Nowika*

Autorzy: *Dorota Nowak, Ewa Sygulla, Jerzy Nowik, Tomasz Szwed, Stanisław Zieleń*

Program jest dopuszczony do użytku szkolnego na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego – rekomendacja Uniwersytet Warszawski i mgr. Marka Sadowskiego – rekomendacja Minister Edukacji Narodowej.

Numer dopuszczenia: DKOS-5002-37/05

Podstawa prawna

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 6 listopada 2003 r. *zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół* (Dz. U. Nr 210, poz. 2041) określa podstawę programową kształcenia ogólnego dla uzupełniających liceów ogólnokształcących i techników uzupełniających (zał. Nr 2). Jest ona taka sama jak podstawa programowa kształcenia ogólnego dla liceów ogólnokształcących, liceów profilowanych i techników. Istnieje potrzeba opracowania programu nauczania matematyki dla uzupełniającego liceum ogólnokształcącego oraz technikum uzupełniającego.

Program został dostosowany do zmian w *Podstawie programowej z dnia 23 sierpnia 2007 r.*

Wstęp

Program *Matematyka bliżej nas* — opracowany dla uzupełniającego liceum i technikum — jest kontynuacją programu dla zasadniczej szkoły zawodowej o tej samej nazwie. Jego konstrukcja umożliwia realizację treści zawartych w *Podstawie programowej* dla czwartego etapu edukacyjnego w zakresie podstawowym. Przygotowując program, uwzględniono zadania szkoły i nauczycieli oraz cele dydaktyczne nauczania matematyki określone w *Podstawie* oraz standardy wymagań egzaminacyjnych na egzamin maturalny, a także standardy wymagań na egzamin potwierdzający kwalifikacje zawodowe w zasadniczej szkole zawodowej i technikum.

Realizacja programu *Matematyka bliżej nas* w liceum i technikum uzupełniającym wymaga 6 godzin tygodniowo w pełnym cyklu kształcenia. (W cyklu 2-letnim: 3 + 3, w cyklu 3-letnim: 2 + 2 + 2.)

Program ma układ spiralny. W efekcie powtarzające się wiadomości i umiejętności są modyfikowane i stopniowo poszerzane, co stwarza dodatkowe możliwości kształtowania pojęć i umiejętności, a także utrwalania i pogłębiania wiedzy, również poznanej we wcześniejszych etapach kształcenia. Taki układ powinien zatem przyczynić się do pełniejszej realizacji celów kształcenia, rozumianych jako zamierzone osiągnięcia uczniów pod względem emocjonalno-motywacyjnym, poznawczym, światopoglądowym i praktycznym, a są to działania, postawy, wiadomości i umiejętności, które powinien opanować uczeń po zakończonym etapie kształcenia. [K. Kruszewski red.: *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*. PWN, Warszawa 2005]. Program zakłada, że nauczanie matematyki poprzez stosowanie odpowiednich metod będzie sprzyjać rozwojowi emocjonalnemu, intelektualnemu, światopoglądowemu i praktycznemu.

Rozwój emocjonalny, zwany też motywacyjnym, osiągnąć można przez stwarzanie sytuacji sprzyjających do aktywnego uczestnictwa w działaniu, podejmowania działania, a w konsekwencji nastawienia na działanie, które jest niezbędne do skutecznego funkcjonowania w rzeczywistości społeczno-gospodarczej.

Dużo uwagi koncentruje się na kształtowaniu umiejętności i postaw pozwalających na funkcjonowanie w świecie stale dokonujących się zmian wymagających permanentnego doskonalenia się. Mając na uwadze wszechstronny rozwój ucznia, nauczyciel matematyki powinien stwarzać warunki do wyrabiania umiejętności takich, jak:

- planowanie, organizowanie, ocenianie własnego kształcenia i branie za nie odpowiedzialności;
- prezentowanie własnego punktu widzenia, uwzględnianie poglądów innych ludzi i porozumiewanie się w różnych sytuacjach;
- współdziałanie w zespole, podejmowanie decyzji i zachowanie obowiązujących norm;
- rozwiązywanie problemów w twórczy sposób;
- poszukiwanie, porządkowanie i wykorzystanie informacji z różnych źródeł oraz posługiwanie się komputerami i innymi środkami multimedialnymi;
- stosowanie w praktyce przyswojonej wiedzy oraz wyrabianie odpowiednich nawyków;
- rozwijanie sprawności intelektualnych i zainteresowań.

W sferze wychowawczej działania nauczyciela matematyki nie powinny się różnić od zadań szkoły i rodziców. Należy wspierać uczniów w przejmowaniu odpowiedzialności za własne życie i rozwój osobowy.

W dziedzinie poznawczej program zakłada stwarzanie sytuacji do odkrywania pojęć i stosowania metod wyzwających aktywność uczniów. Uczeń powinien dostrzegać problemy w środowisku, w którym przebywa, próbować je ująć i interpretować w pewnym modelu matematycznym, następnie wyciągać odpowiednie wnioski.

Kształcenie matematyczne powinno uwzględniać wszechstronny rozwój ucznia jako nadrzędny cel pracy edukacyjnej. Możemy to osiągnąć przez:

- wzbogacanie języka w mowie i piśmie pojęciami matematycznymi;
- poznawanie wymaganych pojęć i zdobywanie rzetelnej wiedzy matematycznej umożliwiającej studia wyższe lub zdobywanie zawodu;
- dochodzenie do rozumienia przekazywanych treści;
- rozwijanie zdolności dostrzegania związków i zależności;
- rozwijanie myślenia analitycznego i syntetycznego.

Ucząc, należy dbać, aby uczeń kształtował sobie obraz matematyki nie jako listę definicji i twierdzeń, ale jako ciągle zmieniający się zestaw narzędzi, których będzie używał dla nadania sensu światu, w którym żyje. Podejściu temu służy modelowanie matematyczne, które powinien wykonywać każdy uczeń, gdy chce nadać sens jakiemuś problemowi. Uczniowie słabsi będą w stanie skonstruować tylko bardzo proste modele, trzeba więc podsuwać im niezbyt trudne problemy do rozwiązania.

Zadaniem nauczyciela jest systematyczne umacnianie poczucia pewności, m.in. przez rozwiązywanie ćwiczeń i zadań niezbyt trudnych, ale też niezbyt łatwych. Poczucie pewności nie pojawia się nagle po pokonaniu niskich wymagań, dlatego nieraz wymagania trzeba zwiększyć, aby uczniowie poczuli, że coś osiągnęli. Istotnym warunkiem rozwoju intelektualnego jest stwarzanie sytuacji, gdy wymagania są trochę wyższe niż możliwości ucznia. Oczywiście, rozwiązywanie problemów jest możliwe wówczas, gdy uczniowie mają już opanowany pewien zakres wiedzy matematycznej

Jeżeli zadania i stawiane problemy nie odbiegają zbyt daleko od zastosowań praktycznych, uczeń łatwiej wiąże wiedzę zdobytą z aktualnie nabywaną i dzięki czemu uczy się efektywniej. Wtedy również cel uczenia się jest dla niego jasny. Tylko nieliczni uczniowie widzą w matematyce swoją przyszłość, większość będzie korzystała w życiu tylko z różnych — zwykle niezbyt zaawansowanych — jej narzędzi. Z tego względu w wymaganiach należy zwracać uwagę nie tylko na możliwości intelektualne uczniów, lecz także na przewidywane potrzeby w zakresie poziomu narzędzi matematycznych.

W procesie nauczania obok wiadomości i umiejętności liczy się także organizacja, formy i metody pracy. Nauczanie matematyki winno sprzyjać tworzeniu przyjaznej atmosfery wśród uczniów oraz stwarzać warunki do osiągnięcia wyników na miarę ich możliwości umysłowych.

Korzystanie z nowoczesnych środków dydaktycznych, programów komputerowych i Internetu jest istotnym elementem kształcenia. Zwłaszcza w nauczaniu matematyki istnieje wiele problemów, w których rozwiązywaniu użyteczne jest używanie kalkulatorów graficznych, programów komputerowych, tablicy interaktywnej. W realizacji tego programu wskazane jest korzystanie z różnorodnych środków dydaktycznych oraz niezbędny jest dostęp do komputera w celu ukazania zastosowań matematyki w rozwiązywaniu problemów praktycznych z użyciem istniejących programów komputerowych, np. arkuszy kalkulacyjnych lub baz danych. W rozwiązaniu wielu problemów matematycznych użyteczny będzie kalkulator graficzny, dostępny już w wielu szkołach. Pominiecie w realizacji programu wyżej wymienionych środków nie przeszkadza w realizacji treści programu, ale czyni realizację znacznie uboższą. Niezbędny jednak będzie dobry kalkulator szkolny w rękę każdego ucznia.

I. Cele kształcenia

Jako podstawę konstruowania celów kształcenia przyjęliśmy założenia określone w *Podstawie programowej*, taksonomię celów nauczania opracowaną przez B. Niemierkę (*ABC testów osiągnięć szkolnych*, WSiP, Warszawa 1970) oraz *Standardy wymagań* będące podstawą przeprowadzania egzaminu maturalnego. Porównując ze sobą taksonomię i standardy, zauważamy ścisły związek między nimi.

Taksonomia celów kształcenia ABC	Standardy wymagań egzaminacyjnych
A. Pamiętanie wiadomości	I. Wiadomości i rozumienie <i>Zdający wie, zna, rozumie</i>
B. Rozumienie wiadomości	
C. Umiejętność stosowania wiadomości w sytuacjach typowych	II. Korzystanie z informacji <i>Zdający wykorzystuje i przetwarza informacje</i>
D. Umiejętność stosowania wiadomości w sytuacjach problemowych	III. Tworzenie informacji <i>Zdający rozwiązuje problemy</i>

Ogólne cele edukacyjne liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum zakładają wszechstronny rozwój ucznia oparty na wykształconych umiejętnościach do wykorzystania w praktycznej działalności. Zgodnie z *Podstawą programową* cele te obejmują:

- kształcenie umiejętności operowania najprostszymi obiektami abstrakcyjnymi: liczbami, zmiennymi i zbudowanymi z nich wyrażeniami algebraicznymi, zbiorami (liczb, punktów, zdarzeń elementarnych) oraz funkcjami;
- kształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych dla różnorodnych sytuacji z życia codziennego i wykorzystania ich do rozwiązywania problemów praktycznych;
- kształcenie umiejętności projektowania i wykonywania obliczeń;
- poznawanie podstawowych elementów myślenia matematycznego;
- rozwijanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy.

Przedstawione cele ogólne nadają kierunek edukacji matematycznej w liceum i technikum. Mniej uwagi koncentrują na przyswajaniu i odtwarzaniu wiedzy, więcej — na operowaniu wiedzą, tworzeniu modeli matematycznych do rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych oraz algorytmów do wykonywania obliczeń i rozwiązywania zadań. Matematyka w liceum i technikum to przedmiot, który tworzy się z uczniami, a nie coś, co się tylko przedstawia i ocenia.

W osiągnięciu celów edukacyjnych ucznia powinna wspierać szkoła. Jej zadania w tym zakresie obejmują działania sprzyjające:

- kształceniu umiejętności precyzyjnego formułowania myśli w mowie i piśmie;
- kształceniu wyobraźni przestrzennej;
- kształceniu umiejętności przedstawiania i odczytywania danych w formie symbolicznej, graficznej i za pomocą wzorów;
- rozwijaniu umiejętności wykorzystania nowoczesnych narzędzi wspomagających rozwiązywanie problemów matematycznych (kalkulatory, komputery);
- rozwiązywaniu problemów we współpracy w zespołach.

Cele szczegółowe kształcenia matematycznego zamieszczono jako umiejętności oczekiwane w rozdziale: *Materiał kształcenia i umiejętności oczekiwane*. Są one bezpośrednio związane z materiałem nauczania, co powinno ułatwić realizację treści kształcenia, tzn. celów kształcenia, materiału nauczania i wymagań programowych, również wymagań na egzaminie maturalnym.

II. Materiał kształcenia i oczekiwane osiągnięcia uczniów

I. Liczby i zbiory	
Treści	Uczeń potrafi:
1. Pojęcie zbioru i podzbioru; suma, iloczyn i różnica zbiorów. Równość zbiorów. Inkluzja.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Podawać przykład zbioru i wskazać jego podzbiór. ➤ Utworzyć sumę, iloczyn i różnicę danych zbiorów. ➤ Określać relacje równości i zawierania się zbiorów.
2. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory: liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Określić zależności między zbiorami liczbowymi.
3. Podzielność liczb naturalnych; liczby pierwsze i złożone.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Posługiwać się podzielnością liczb naturalnych oraz własnościami liczb pierwszych i złożonych.
4. Działania na liczbach rzeczywistych, własności działań.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Wykonywać działania na liczbach rzeczywistych. ➤ Przedstawiać zapis liczby rzeczywistej w innej postaci, np. $\frac{2}{5} = 0,4; 0,14 = \frac{7}{50}; \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; 3\sqrt{5} = \sqrt{45}; \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$ $\frac{3}{2-\sqrt{2}} = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}.$ ➤ Zastosować w obliczeniach własności działań.
5. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Wyznaczać rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej ➤ Podawać własności rozwinięcia dziesiętnego liczby niewymiernej.
6. Porównywanie liczb rzeczywistych.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Porównywać liczby rzeczywiste.
7. Potęgą o wykładniku wymiernym; działania na potęgach.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Obliczać wartość potęgi o wykładniku całkowitym i wymiernym.
8. Pierwiastki arytmetyczne. Działania na pierwiastkach, w tym na liczbach typu $a + b\sqrt{c}$. Usuwanie niewymierności z mianownika.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Obliczać wartość pierwiastka arytmetycznego. ➤ Wykonywać działania na pierwiastkach, w tym na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$. ➤ Posługiwać się kalkulatorem w obliczaniu przybliżonych wartości potęg i pierwiastków. ➤ Wykonywać działania na potęgach o wykładnikach wymiernych.
9. Oś liczbową. Przedziały na osi liczbowej; suma, różnica i iloczyn przedziałów.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zilustrować na osi liczbowej przedział oraz sumę, różnicę i iloczyn przedziałów liczbowych.
10. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej; interpretacja geometryczna.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Obliczać wartość bezwzględną liczby. ➤ Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $x - a = b$, $x - a < b$, $x - a > b$, itp. ➤ Obliczać odległość punktów na osi liczbowej. ➤ Zapisywać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami.
11. Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Wyznaczać błąd względny i bezwzględny. ➤ Oszacować wartość liczbową. Porównywać wielkości liczbowe. ➤ Szacować wyniki obliczeń zadaną dokładnością.

12. Obliczenia procentowe. Podwyżki, obniżki i rabaty.	➤ Zastosować procenty w obliczeniach praktycznych niezbędnych w życiu.
13. Procent prosty i składany.	➤ Zastosować wzór na procent składany do obliczenia odsetek od lokat kapitału lub udzielonych kredytów.

II. Planimetria	
Treści	Uczeń potrafi:
1. Kąty w okręgu	➤ Określić wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie
2. Czworokąt wypukły i jego własności.	➤ Stosować w zadaniach zależności między kątem wpisanym i kątem środkowym opartym na tym samym łuku
3. Figury symetryczne względem prostej; oś symetrii figury.	➤ Obliczać sumę miar kątów czworokąta.
4. Figury symetryczne względem punktu; środek symetrii figury.	➤ Przeprowadzać dowód wybranej własności dowolnego równoległoboku.
5. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.	➤ Zastosować w rozwiązywaniu problemów własności boków, kątów i przekątnych: równoległoboku, prostokąta, rombu i kwadratu.
6. Związki miarowe w trójkącie prostokątnym.	➤ Skonstruować figury symetryczne względem prostej.
7. Podobieństwo trójkątów. Cechy podobieństwa trójkątów. Figury podobne.	➤ Wskazać figurę, która ma oś symetrii.
8. Pola wielokątów. Pole koła i długość okręgu.	➤ Skonstruować figury symetryczne względem punktu.
	➤ Wskazać figurę, która ma środek symetrii.
	➤ Określać sinus, cosinus, tangens i kotangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
	➤ Posługiwać się kalkulatorem w obliczaniu wartości funkcji trygonometrycznej danego kąta i miary kąta, gdy dana jest wartość funkcji trygonometrycznej.
	➤ Obliczać długość dowolnego boku lub miarę kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
	➤ Zastosować funkcje trygonometryczne kąta ostrego do obliczania długości odcinków i miar kątów w figurach geometrycznych
	➤ Rozpoznawać trójkąty podobne na podstawie cech podobieństwa trójkątów.
	➤ Wskazywać odcinki proporcjonalne w trójkątach podobnych.
	➤ Zastosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązywania zadań.
	➤ Zastosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania problemu teoretycznego lub praktycznego.
	➤ Wyprowadzać wzór na stosunek pól trójkątów podobnych lub prostokątów podobnych.
	➤ Obliczać pole trójkąta, trapezu, równoległoboku, prostokąta i kwadratu.
	➤ Podawać sposób obliczenia pola dowolnego wielokąta i wielokąta foremnego.
	➤ Obliczać pole koła i długość okręgu.

<p>9. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego do obliczania pól oraz wyznaczania związków miarowych w figurach geometrycznych.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zastosować funkcje trygonometryczne do wyznaczenia długości odcinków i miar kątów w figurach geometrycznych. ➤ Określać sinus, kosinus, tangens i kotangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. ➤ Obliczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest wartość jednej z nich. ➤ Obliczać przy pomocy kalkulatora lub tablic przybliżoną wartość funkcji trygonometrycznej danego kąta ostrego. ➤ Uzasadnić prostą tożsamość trygonometryczną, np. postaci $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
---	---

III. Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa.	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Pojęcie funkcji. Przykłady funkcji i sposoby ich określania.</p> <p>2. Wykres funkcji liczbowej. Przesunięcie wykresu funkcji.</p> <p>3. Funkcja liniowa, jej wykres i własności.</p> <p>4. Zastosowanie funkcji liniowej do opisu zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.</p> <p>5. Równania i nierówności liniowe.</p> <p>6. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi.</p> <p>7. Postać kanoniczna, iloczynowa i ogólna trójmianu kwadratowego.</p> <p>8. Przesunięcie wykresu funkcji.</p> <p>9. Zastosowanie funkcji kwadratowej do opisu zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Przedstawiać zależność funkcyjną tabelką, grafem, wzorem, wykresem, opisem słownym. ➤ Przesuwać wykres funkcji o wektor równoległy do osi x lub osi y układu współrzędnych. ➤ Sporządzać wykres funkcji liniowej. ➤ Zbadać monotoniczność funkcji liniowej. ➤ Wyznaczać wartość funkcji, gdy dany jest jej argument. ➤ Wyznaczać argument, gdy dana jest wartość funkcji jemu odpowiadająca. ➤ Wyznaczać miejsca zerowe funkcji określonej wzorem. ➤ Przesuwać wykres funkcji o wektor równoległy do osi układu współrzędnych. ➤ Zastosować funkcję liniową do opisu zależności z życia codziennego. ➤ Rozwiązać problem teoretyczny lub praktyczny przy pomocy równania lub nierówności liniowej ➤ Rozwiązać problem teoretyczny lub praktyczny przy pomocy układu równań liniowych. ➤ Obliczać pierwiastki trójmianu kwadratowego. ➤ Rozkładać trójmian kwadratowy na czynniki liniowe. ➤ Sporządzać wykres funkcji kwadratowej. ➤ Wyznaczać wartość funkcji, gdy dany jest jej argument. ➤ Wyznaczać argument, gdy dana jest wartość funkcji jemu odpowiadająca. ➤ Odczytać z wykresu funkcji: dziedzinę, miejsca zerowe, największą i najmniejszą wartość w przedziale oraz zbiór wartości. ➤ Przesuwać wykres funkcji kwadratowej o wektor równoległy do osi układu współrzędnych. ➤ Zastosować funkcję kwadratową do opisu zależności z życia codziennego. ➤ Wykorzystywać własności funkcji kwadratowej i jej wykresu do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

<p>10. Równanie kwadratowe i jego rozwiązanie.</p> <p>12. Nierówność drugiego stopnia z jedną niewiadomą.</p> <p>13. Zastosowanie równań kwadratowych i nierówności drugiego stopnia do rozwiązywania problemów teoretycznych i praktycznych.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Rozwiązać algebraicznie i graficznie równanie kwadratowe. ➤ Rozwiązać algebraicznie i graficznie nierówność drugiego stopnia. ➤ Wykonać interpretację geometryczną nierówności kwadratowej. ➤ Rozwiązać problem teoretyczny lub praktyczny przy pomocy równania kwadratowego lub nierówności drugiego stopnia.
---	---

IV. Wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze i logarytmy	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Wielomiany. Działania na wielomianach.</p> <p>2. Wzory skróconego mnożenia. Rozkładanie wielomianów na czynniki. Pierwiastki wielomianów.</p> <p>3. Równania wielomianowe.</p> <p>4. Nierówności wielomianowe.</p> <p>5. Wyrażenia wymierne. Działania na wyrażeniach wymiernych.</p> <p>6. Funkcje wykładnicze.</p> <p>7. Logarytmy i ich podstawowe własności.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Uporządkować wielomian oraz określić jego współczynniki i stopień. ➤ Sprawdzać i określać warunki równości wielomianów. ➤ Wykonać dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów. ➤ Sprawdzić, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu. ➤ Korzystać z wzorów skróconego mnożenia. ➤ Rozkładać wielomian na czynniki. ➤ Wyznaczać pierwiastki wielomianu. ➤ Rozwiązać równanie wielomianowe. ➤ Rozwiązać prostą nierówność wielomianową. ➤ Rozpoznać wyrażenie wymierne. ➤ Określić dziedzinę wyrażenia wymiernego. ➤ Obliczać wartość wyrażenia wymiernego dla danych wartości jego zmiennych. ➤ Skrócić lub rozszerzyć wyrażenie wymierne. ➤ Wykonać dodawanie, odejmowanie i mnożenie wyrażeń wymiernych. ➤ Określić warunki istnienia funkcji wykładniczej. ➤ Naszkicować wykres funkcji wykładniczej. ➤ Odczytać własności funkcji wykładniczej z wykresu. ➤ Potrafi zapisać logarytm w postaci potęgi. ➤ Obliczy wartość logarytmu na podstawie definicji logarytmu. ➤ Stosuje własności logarytmów w obliczeniach.

V. Elementy statystyki	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych statystycznych oraz odczytywanie danych zaprezentowanych w postaci graficznej i tabelarycznej.</p> <p>2. Średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana i dominanta danych statystycznych.</p> <p>3. Rozstęp, wariancja i odchylenie standardowe z próby.</p> <p>4. Zastosowanie poznanych pojęć w zadaniach i w życiu codziennym.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zbierać i porządkować dane statystyczne. ➤ Przedstawiać dane diagramem słupkowym, kołowym, histogramem oraz wykresem punktowym lub liniowym. ➤ Odczytywać dane z diagramów i wykresów. ➤ Obliczać średnią arytmetyczną danych. ➤ Obliczać średnią arytmetyczną szeregu statystycznego pogrupowanego na klasy przy pomocy przedziałów. ➤ Obliczać średnią ważoną danych statystycznych. ➤ Wyznaczać medianę i dominantę danych statystycznych. ➤ Zinterpretować średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych statystycznych. ➤ Porównać wyniki pomiarów za pomocą średniej arytmetycznej, mediany i dominanty. ➤ Wyznaczać rozrzut danych statystycznych. ➤ Obliczać wariancję i odchylenie standardowe danych statystycznych. ➤ Zastosować poznane pojęcia statystyczne do opisu i interpretacji danych statystycznych.

VI. Ciągi liczbowe	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Definicja i przykłady ciągów liczbowych. Sposoby określania ciągów.</p> <p>2. Monotoniczność ciągu liczbowego.</p> <p>3. Ciąg arytmetyczny i jego własności.</p> <p>4. Ciąg geometryczny i jego własności</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zdefiniować ciąg jako funkcję określoną w zbiorze liczb naturalnych. ➤ Naszkicować wykres ciągu. ➤ Określać ciąg wzorem ogólnym. ➤ Obliczać dowolny wyraz ciągu. ➤ Zbadać monotoniczność ciągu liczbowego. ➤ Rozpoznawać ciąg arytmetyczny. ➤ Posługiwać się wzorem na ogólny wyraz ciągu arytmetycznego. ➤ Posługiwać się wzorem na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego. ➤ Rozpoznawać ciąg geometryczny. ➤ Posługiwać się wzorem na ogólny wyraz ciągu geometrycznego. ➤ Posługiwać się wzorem na sumę wyrazów ciągu geometrycznego. ➤ Zastosować ciąg w badaniu problemu praktycznego lub teoretycznego.

VII. Geometria analityczna	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Równanie prostej na płaszczyźnie w postaci ogólnej i kierunkowej.</p> <p>2. Półpłaszczyzna w układzie współrzędnych. Układy nierówności stopnia I z dwiema niewiadomymi.</p> <p>3. Graficzna ilustracja nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi.</p> <p>4. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej – odległość punktów, odległość punktu od prostej, odległość prostych równoległych.</p> <p>5. Równanie okręgu</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Rozpoznać równanie prostej w postaci ogólnej i kierunkowej. ➤ Przekształcać równanie prostej z postaci ogólnej do kierunkowej i na odwrot. ➤ Interpretować współczynniki w równaniu kierunkowym prostej. ➤ Wykreślać prostą daną równaniem. ➤ Sprawdzać, czy punkt o danych współrzędnych należy do prostej danej równaniem. ➤ Napisać równanie prostej wyznaczonej przez dwa punkty o danych współrzędnych. ➤ Obliczać współrzędne punktu przecięcia się prostych o danych równaniach. ➤ Wyznaczać równanie prostej równoległej (prostopadłej) do prostej danej równaniem. ➤ Wyznaczać równanie prostej prostopadłej do prostej danej równaniem. ➤ Wyznaczać zbiór punktów określony równaniem lub nierównością typu $x = a$, $x \leq a$, $x > a$ na osi liczbowej i na płaszczyźnie układu współrzędnych ➤ Wykonać graficzną ilustrację nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi. ➤ Rozwiązać układ nierówności stopnia I z dwiema niewiadomymi. ➤ Obliczać odległość dwóch punktów o danych współrzędnych. ➤ Obliczać odległość punktu o danych współrzędnych od prostej danej równaniem. ➤ Wyznaczać odległość dwóch prostych równoległych. ➤ Zastosować równanie prostej do rozwiązania problemu teoretycznego lub praktycznego. ➤ Napisać równanie okręgu mając współrzędne środka i promień okręgu. ➤ Wyznaczać współrzędne środka okręgu i długość promienia okręgu określonego równaniem w postaci ogólnej.

VIII. Stereometria	
Treści	Uczeń potrafi:
<p>1. Równoległość prostych i płaszczyzn.</p> <p>2. Prostopadłość prostych i płaszczyzn.</p> <p>3. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zdefiniować proste równoległe w przestrzeni. ➤ Zdefiniować prostą równoległą do płaszczyzny. ➤ Zdefiniować dwie płaszczyzny równoległe. ➤ Rozstrzygnąć, jaka prosta jest prostopadła do płaszczyzny. ➤ Sformułować warunki, przy których dwie płaszczyzny są prostopadłe ➤ Wyznaczać kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

<p>4. Kąt dwuścienny.</p> <p>5. Graniastosłup i ostrosłup.</p> <p>6. Obliczanie pola powierzchni i objętości graniastosłupa prostego i ostrosłupa z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.</p> <p>7. Bryły obrotowe: walec, stożek i kula.</p> <p>8. Obliczanie pola powierzchni i objętości walca, stożka i kuli z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Wyznaczać kąt liniowy kąta dwuściennego. ➤ Zaprezentować własności oraz rodzaje graniastosłupów i ostrosłupów. ➤ Obliczać pole powierzchni bocznej graniastosłupa i ostrosłupa. ➤ Obliczać pole powierzchni oraz objętość graniastosłupa i ostrosłupa. ➤ Zastosować własności graniastosłupa i ostrosłupa do rozwiązania problemu praktycznego. ➤ Zastosować funkcje trygonometryczne kąta ostrego do obliczania długości odcinków i miar kątów w graniastosłupach i ostrosłupach. ➤ Zastosować funkcje trygonometryczne do obliczenia długości odcinków i miar kątów w wielościanach i bryłach obrotowych. ➤ Obliczać pole powierzchni walca, stożka i kuli. ➤ Obliczać objętość walca, stożka i kuli. ➤ Zastosować własności graniastosłupa, ostrosłupa lub bryły obrotowej do rozwiązania problemu praktycznego.
--	--

IX. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Treści	Uczeń potrafi:
<p>2. Doświadczenie losowe. Zbiór zdarzeń elementarnych.</p> <p>3. Działania na zdarzeniach.</p> <p>4. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności.</p> <p>5. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Określić zbiór zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i podać ich liczbę. ➤ Opisać zdarzenie losowe. ➤ Ustalić zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu i wyznaczyć ich liczbę. ➤ Określić sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń. ➤ Sformułować klasyczną definicję prawdopodobieństwa. ➤ Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w modelu klasycznym oraz za pomocą drzewa stochastycznego. ➤ Posłużyć się własnościami prawdopodobieństwa w obliczeniu prawdopodobieństwa zdarzenia.

III. Umiejętności konieczne

Na umiejętności konieczne składają się wiadomości i umiejętności, które są niezbędne do kontynuowania nauki w klasie wyższej. Wykaz tych umiejętności może być przydatny przy konstruowaniu testów lub sprawdzianów osiągnięć koniecznych, gdy trzeba podjąć decyzję o szansach ucznia na kontynuację nauki. Lista umiejętności koniecznych powstała w wyniku analizy powiązań treści nauczania w cyklu kształcenia. Przy szczegółowych ustalaniu wymagań koniecznych należy kierować się informacjami zamieszczonymi w rozdziale V. *Wymagania programowe i ewaluacja osiągnięć uczniów.*

Dział	Uczeń potrafi:
Liczby i zbiory	<ul style="list-style-type: none">➤ Podać przykład zbioru i wskazać jego podzbiór.➤ Wskazać elementy należące do sumy, iloczynu i różnicy zbiorów.➤ Wskazać liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.➤ Wyznaczyć za pomocą kalkulatora przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej zadaną dokładnością.➤ Wykonać za pomocą kalkulatora działania na liczbach rzeczywistych.➤ Wykonać najprostsze przekształcenie zapisu liczby rzeczywistej na inną postać.➤ Wyznaczyć rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej.➤ Obliczyć wartość potęgi o wykładniku całkowitym i wymiernym.➤ zilustrować przedział na osi liczbowej.➤ Podać wartość bezwzględną liczby rzeczywistej.➤ Oszacować wartość liczbową.➤ Obliczyć procent składany od kapitału ulokowanego na określony procent i termin.
Planimetria	<ul style="list-style-type: none">➤ Określić wzajemne położenie prostej i okręgu.➤ Korzystać ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu➤ Wskazać wierzchołki, kąty, boki i przekątne czworokąta.➤ Skorzystać z własności prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu i trapezu do rozwiązywania prostych zadań.➤ Posłużyć się proporcjami trygonometrycznymi w trójkącie prostokątnym do obliczenia długości boku lub miary kąta.➤ Rozpoznać trójkąty podobne na podstawie cech podobieństwa.➤ Obliczyć pole prostokąta, trójkąta, równoległoboku, trapezu i koła.➤ Obliczyć obwód i pole koła.➤ Obliczyć za pomocą kalkulatora wartości funkcji trygonometrycznej kąta ostrego.➤ Zastosować związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego do rozwiązywania zadań.➤ Sprawdzić prostą tożsamość trygonometryczną.

<p>Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Przedstawić zależność funkcyjną tabelką, grafem, wzorem, wykresem, opisem słownym. ➤ Wyznaczyć wartość funkcji, gdy dany jest jej argument. ➤ Wyznaczyć argument, gdy dana jest wartość funkcji odpowiadająca temu argumentowi. ➤ Odczytać z wykresu funkcji jej argumenty i wartości. ➤ Sporządzić wykres funkcji liniowej. ➤ Rozłożyć trójmian kwadratowy na czynniki. ➤ Sporządzić wykres funkcji kwadratowej. ➤ Rozwiązać równanie kwadratowe. ➤ Rozwiązać nierówność stopnia drugiego z jedną niewiadomą. ➤ Zastosować równanie lub nierówność kwadratową do rozwiązania prostego problemu. ➤ Odczytać z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność. ➤ Zastosować pojęcie funkcji do opisu prostych zależności występujących w życiu.
<p>Wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze i logarytmy</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Dodać, odjąć i pomnożyć wielomiany. ➤ Sprawdzić, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu. ➤ Rozłożyć wielomian na czynniki. ➤ Obliczyć wartość wyrażenia wymiernego. ➤ Dodać, odjąć, pomnożyć i podzielić bardzo proste wyrażenia wymierne. ➤ Sporządzić wykres proporcjonalności odwrotnej. ➤ Określić warunki istnienia funkcji wykładniczej. ➤ Zapisać logarytm w postaci potęgi.
<p>Elementy statystyki</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zebrać i uporządkować dane statystyczne. ➤ Przedstawić dane diagramem słupkowym, histogramem, diagramem kołowym, wykresem punktowym lub liniowym. ➤ Odczytać dane przedstawione graficznie. ➤ Obliczyć średnią arytmetyczną szeregu statystycznego. ➤ Wyznaczyć rozrzut danych statystycznych. ➤ Obliczyć wariancję i odchylenie standardowe danych statystycznych.
<p>Ciągi liczbowe</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Obliczyć dowolny wyraz ciągu. ➤ Posłużyć się wzorem na wyraz ogólny i sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. ➤ Posłużyć się wzorem na wyraz ogólny i sumę n wyrazów ciągu geometrycznego.
<p>Geometria analityczna</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Wykreślić prostą, mając dane jej równanie. ➤ Sprawdzić, czy punkt o danych współrzędnych należy do prostej. ➤ Obliczyć odległość dwóch punktów o danych współrzędnych. ➤ Wykonać graficzną ilustrację nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi. ➤ Wyznaczyć współrzędne środka okręgu oraz długość promienia mając równie okręgu. ➤ Napisać równie okręgu mając współrzędne środka okręgu oraz długość promienia.

Stereometria	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zinterpretować na modelach położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni. ➤ Wskazać na modelu kąt nachylenia prostej do płaszczyzny oraz kąt liniowy kąta dwuściennego. ➤ Wymienić rodzaje i własności graniastosłupów i ostrosłupów. ➤ Obliczyć pole powierzchni graniastosłupa i ostrosłupa. ➤ Obliczyć objętość graniastosłupa i ostrosłupa. ➤ Zastosować funkcje trygonometryczne kąta ostrego do obliczenia długości odcinków i miar typowych kątów w graniastosłupach i ostrosłupach. ➤ Opisać walec, stożek i kulę. ➤ Obliczyć pole powierzchni walca stożka i kuli. ➤ Obliczyć objętość walca, stożka i kuli. ➤ Zastosować własności brył obrotowych do rozwiązania problemu praktycznego.
IX. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Określić zbiór zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. ➤ Ustalić zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu losowemu. ➤ Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia.

Propozycje uszczegółowionych wymagań – umiejętności – na poszczególne stopnie szkolne są zamieszczone na początku każdego rozdziału w podręczniku: *MATEMATYKA dla uzupełniającego liceum ogólnokształcącego i technikum uzupełniającego* Wydawnictwo NOWIK, Opole 2008.

IV. Procedury osiągnięcia celów

Kierunki kształcenia matematycznego, jakie wyznaczają przyjęte cele i zadania, mają pomóc uczniowi w poznawaniu i zrozumieniu świata oraz w podejmowaniu zadań w różnorodnych dziedzinach działania.

Racjonalne dostosowanie kształcenia do potrzeb, pragnień i możliwości intelektualnych ucznia daje nowe spojrzenie na cele kształcenia i konkretne osiągnięcia poszczególnych uczniów. Oczekuje się kształcenia matematycznego dostosowanego do indywidualnych zainteresowań ucznia, w którym odkrywanie i operowanie wiedzą jest ważniejsze od uczenia się i odtwarzania gotowych treści.

Wiązanie celów operacyjnych w postaci umiejętności oczekiwanych z materiałem kształcenia informuje dokładnie, co uczniowie powinni osiągnąć oraz jakie cele wymagają szczególnej troski.

Umiejętności wymienione w tym programie, poza nielicznymi wyjątkami, są sformułowane na poziomie podstawowym. Zakłada się, że umiejętności te będą kształtowane również na wyższym lub niższym poziomie. Będzie to zależało od wielu czynników, takich jak np. możliwości intelektualne uczniów, warunki materialne szkoły, wyposażenie w środki dydaktyczne i in. Zakres realizowanych celów i treści zmienia się także w zależności od warunków zastosowania, trudności materiału i oczekiwanych osiągnięć, które ulegają zmianom w toku kształcenia. Na przykład:

Sformułowaną w programie umiejętność *posłużyć się pojęciem bezwzględnej wartości* można odnieść do posługiwania się wartością bezwzględną: liczb, np. $|2 - \sqrt{5}|$, zmiennej $|x|$ lub wyrażenia $|2x - 1|$. Ma ono różne warstwy i każda z nich określa odpowiedni poziom umiejętności związany z wymaganiami na konkretną ocenę szkolną.

Kształtowanie każdej umiejętności wymaga wielu czynności dydaktycznych. Uczeń powinien poznać pojęcia z nią związane — najlepiej w sytuacjach problemowych, stosować do rozwiązywania zadań typowych i problemowych, a następnie umiejętność pogłębiać w toku dalszego kształcenia.

Dużą wartość dydaktyczną — związaną z kształceniem umiejętności — ma dostrzeganie problemów, ich dyskusowanie, układanie i rozwiązywanie zadań oraz przekazywanie informacji i opisywanie w języku matematyki wyabstrahowanych własności rzeczywistości. Dostrzec, a następnie rozwiązać problem, to posłużyć się opanowanymi umiejętnościami i poznać nowe z zakresu rozwiązywanego problemu.

Problem to zadanie wymagające pokonania jakiejś trudności teoretycznej lub praktycznej. Trzeba tak konstruować materiał nauczania, aby stawał ucznia wobec trudności, które zachęcają go do aktywnego uczestniczenia w poszukiwaniu rozwiązania.

Rozwiązując problemy, uczniowie jednocześnie poznają pojęcia, definicje, twierdzenia, kształtują nowe umiejętności oraz uczą się biegłego posługiwania się nimi w nowych sytuacjach i na nowym materiale. Kształcenie przez rozwiązywanie problemów trwa dłużej, aniżeli przyswajanie gotowej wiedzy, ale dzięki temu efekty są trwałe, a sam proces uczenia się jest niewyczerpalnym źródłem motywacji.

Realizacja celów kształcenia dokonuje się w procesie dydaktycznym na lekcjach matematyki. Zależy, więc od organizacji, form pracy, stosowanych technik, metod nauczania, środków dydaktycznych, programu, planowania, podręczników, zbiorów zadań, materiałów pomocniczych i atmosfery w klasie.

Stosuje się trzy sprawdzone formy organizacji kształcenia:

- praca zbiorowa — z całą klasą,
- praca w grupach,
- praca indywidualna.

Każda z tych form może odegrać pozytywną rolę w kształceniu, jeśli będzie planowana w zależności od celów, jakie chcemy osiągnąć. Należy jednak pamiętać, iż nadużywanie pracy zbiorowej powoduje spadek samodzielności i aktywności uczniów, a nadmiar pracy indywidualnej zwiększa różnice osiągnięć między uczniami. Najkorzystniejsza jest praca w grupach, rozwijająca m. in. umiejętność komunikowania się, która jest równie ważna na lekcjach matematyki, jak i na innych przedmiotach. Warto także zauważyć, iż praca w grupach, umiejętnie kierowana przez nauczyciela, nie tylko zwiększa dyskusję między uczniami, ale wpływa korzystnie również na aktywność uczniów, a co za tym idzie — wzrastają efekty kształcenia i osiągnięcia uczniów.

Na dobór metod powinny mieć istotny wpływ cele nauczania. Dzięki odpowiednim metodom, które można zmieniać elastycznie w toku lekcji, ułatwiamy uczniom zrozumienie materiału i wyzwalamy ich zaangażowanie w pracę na zajęciach. Powszechnie zalecana różnorodność metod nauczania podczas lekcji powinna wynikać z różnorodności celów szczegółowych, różnorodności treści i zależeć od sytuacji dydaktycznych, tj. uczniów, nauczyciela, wyposażenia szkoły i organizacji. Nie istnieją metody ogólnie lepsze i ogólnie gorsze, a nie ma również metod w pełni gotowych do wykorzystania. Metody trzeba po prostu tworzyć odpowiednio do warunków, jakie wynikają z celów i danej sytuacji dydaktycznej. W. Okoń w swej koncepcji kształcenia zaprezentowanej we *Wprowadzeniu do dydaktyki ogólnej* [PWN, Warszawa 1987] wyodrębnił:

- metody podające,
- metody problemowe,
- metody waloryzujące,
- metody praktyczne.

W procesie dydaktycznym nauczania matematyki, aby osiągnąć cele, jakich oczekuje się od nauczania tego przedmiotu, trzeba stwarzać okazje do:

- krótkiego wykładu i wyjaśnienia fragmentu treści przez nauczyciela,
- dyskusji między uczniami oraz dyskusji między nauczycielem i uczniami,
- praktycznych czynności,
- powtarzania i nabywania biegłości w zakresie podstawowych umiejętności i typowych algorytmów,
- rozwiązywania problemów i stosowania matematyki w życiu codziennym,
- prowadzenia prac projektowo-badawczych.

Ograniczanie nauczania tylko do niektórych metod nie wyposaża uczniów w oczekiwane umiejętności przypisywane matematyce.

Proces uczenia się powinien obejmować autentyczne dzielenie się poglądami i myślami. Niezbędne jest stwarzanie takiej atmosfery w klasie, aby słuchanie innych i wypowiedzanie własnych myśli było zachowaniem naturalnym, a rozumowanie, argumentacja i fakty — podstawą dyskusji matematycznej.

Pomocną rolę w zachęcaniu uczniów do komunikowania pomysłów i prowadzenia dyskusji mogą odegrać sytuacje problemowe, materiały manipulacyjne i środki techniczne (kalkulatory graficzne, komputery) oraz Internet.

W ramach czynności praktycznych uczniowie mogą wykonywać modele, szkielety brył, konstruować siatki i tworzyć nietypowe wielościany oraz inne bryły. Dzięki czynnościom praktycznym uzyskuje się nieraz zrozumienie trudności intelektualnych przy zamianie aktywności intelektualnej na praktyczną.

Do prac o charakterze badawczym należy uczniów przygotowywać w toku nauczania. Można rozpoczynać od uogólniania własności pojęć matematycznych, po czym podsuwać odpowiednie problemy do badań, a następnie zachęcać do samodzielnych prób. Interesujące dla uczniów mogą okazać się badania bliskie życia codziennego, praktyki zawodowej, z wykorzystaniem metod statystycznych. Atrakcyjną metodą dla ucznia, a zarazem wzbudzającą jego zaangażowanie, może być metoda portfolio. Można ją wykorzystywać w celu ćwiczenia umiejętności wyszukiwania i porządkowania informacji na dany temat.

Wybór metod i technik nauczania zależy od celów lekcji, poziomu wiedzy uczniów, bazy dydaktycznej, a przede wszystkim od nauczyciela. Stosowanie na lekcjach matematyki nieszablonowych zadań i rozwiązań, przytaczanie ciekawostek i wskazywanie zastosowań matematyki wzbudza zainteresowanie przedmiotem, wyzwala u uczniów kreatywność oraz chęć pracy nad problemem i samodzielnego rozwiązania go.

W nauczaniu dużą część treści kształcenia stanowią umiejętności wyższe niż podstawowe. Może pojawić się wówczas problem: *Jak zachowują się uczniowie o mniejszych zdolnościach, którzy zadowolają się opanowaniem umiejętności podstawowych? Jak zachęcić, zmotywować ich do większego wysiłku intelektualnego?*

Jednym ze sposobów jest stosowanie różnorodnych metod nauczania i form organizacyjnych. Takim uczniom warto pokazywać zastosowania poznawanej wiedzy matematyczne w rozwiązywaniu problemów z życia codziennego i praktyki zawodowej. W nauczaniu indywidualnym można kierować się wyborem umiejętności dostosowanych do możliwości ucznia i realizować program jego uczenia się, natomiast w klasach liczących, w których dominuje nauczanie zbiorowe lub zespołowe, wszyscy uczniowie edukują się na ogół na tych samych treściach.

Warto pamiętać i uświadczać uczniom, że ich zdolności rozwijają się dzięki pracy intelektualnej. Jeśli uczeń nie pracuje, tracą one nawet jego przeciętne zdolności. Uczeń nie zawsze musi osiągnąć wyższą umiejętność; wystarczy, że opanuje lub utrwali sobie część umiejętności prostych, z których składa się umiejętność wyższa.

Nie wolno dopuścić do szufladkowania uczniów według poziomu umiejętności, lecz trzeba stwarzać im okazje do przewyżniania własnych trudności i przyswajania coraz wyższych umiejętności, które w konsekwencji przyczynią się do rozwijania ich zdolności.

Cele emocjonalno-motywacyjne prowadzące do kształtowania postaw i zachowań związanych z uczestnictwem w działaniu i podejmowaniem działania będą rozwijane wówczas, gdy rozbudzimy zainteresowanie ucznia przedmiotem, m.in. stosując indywidualizację nauczania, przez dostosowywanie zadań do możliwości ucznia oraz wskazując praktyczne zastosowania matematyki. Równie użyteczne jest stosowanie metod aktywizujących do uczestnictwa w działaniu i podejmowania działań, które są opisane w literaturze pedagogicznej. (Zob. B. Kubiczek., *Metody aktywizujące. Jak nauczyć uczniów uczenia się*. WN, Opole 2004 oraz Z. Kierstein. *Aktywne metody w kształceniu matematycznym*. WN Opole, 2005)

Na przykład metoda **metaplanu**, podczas której uczniowie w ramach dyskusji tworzą rozwiązanie, a następnie prezentują wynik w formie plakatu, pozwala rozwiązywać zagadnienia problemowe, a czasem nawet konfliktowe. Mobilizuje uczniów do współpracy w grupie, uczy argumentowania i uznawania racji innych osób, a także rozwija umiejętność komunikowania wyników własnej pracy.

Metoda **śnieżnej kuli** wyzwała pomysłowość i inwencję twórczą w poszukiwaniu rozwiązania. Pokazuje, że otwarcie się na niekonwencjonalne sposoby podejścia do zadania mogą czasem przynieść lepszy efekt niż trwanie w znanych schematach. Późniejsza dyskusja dyscyplinuje uczniów i uczy krytycyzmu oceny pomysłów własnych i kolegów.

Metoda znana jako **66** (6-osobowe zespoły mają 6 minut na rozwiązanie problemu) rozwija umiejętność skutecznego porozumiewania się i prezentowania własnego punktu widzenia na problem, efektywnego współdziałania w zespole, podejmowania decyzji indywidualnych i grupowych, tym samym odpowiedzialności za siebie i grupę.

Wymienione oraz inne metody aktywizujące zawsze przyczyniają się do rozwijania pozytywnego stosunku do pracy, tym samym pozytywnie wpływają na kształtowanie zachowań i postaw ucznia.

V. Wymagania programowe i ewaluacja osiągnięć uczniów

Podstawą do określenia wymagań programowych są standardy edukacyjne uwzględniające cele kształcenia, strukturę materiału, oczekiwania wobec matematyki jako przedmiotu nauczania i możliwości intelektualne uczniów.

Cele operacyjne — rozumiane jako oczekiwane osiągnięcia uczniów — nie wystarczają do określenia wymagań. Formuluje się je na ogół na jednym poziomie — w tym programie poza nielicznymi wyjątkami dotyczą poziomu podstawowego. Określenie z kolei celów operacyjnych dla każdego poziomu wymagań zwiększyłoby ich liczbę do tego stopnia, że praktycznie stałyby się niemożliwe do wykorzystania.

Cele kształcenia, materiał i wymagania programowe rozważane łącznie tworzą treść kształcenia. Jest ona zbiorem nauczanych czynności uporządkowanym ze względu na cele, materiał i wymagania. W toku nauczania treści kształcenia z postaci programowej przekształcają się na konkretne osiągnięcia uczniów.

Określenie wymagań programowych sprowadza się więc do selekcji wśród elementów treści i uporządkowania ich według stopnia trudności. Daje to podział treści na warstwy według poziomów wymagań odpowiadających poszczególnym stopniom szkolnym.

Chcąc określić wymagania, dokonujemy selekcji elementów treści według następujących poziomów:

Wymagania konieczne (K) obejmują elementy treści kształcenia:

- najłatwiejsze, najczęściej stosowane w uczeniu się matematyki,
- bezpośrednio użyteczne w życiu,
- niezbędne w przyswajaniu treści podstawowych,
- wymagające rozwiązywania zadań teoretycznych i praktycznych, typowych, prostych, o niewielkim stopniu trudności.

*Wypełnienie wymagań koniecznych uprawnia ucznia do otrzymania oceny **dopuszczającej**.*

Wymagania podstawowe (P) obejmują elementy treści:

- najważniejsze w uczeniu się matematyki,
- proste i przystępne,
- niezbędne na danym i wyższym etapie kształcenia,
- bezpośrednio użyteczne lub przydatne w życiu,
- wymagające rozwiązywania zadań teoretycznych i praktycznych, typowych o przeciętnym stopniu trudności.

*Wypełnienie wymagań podstawowych uprawnia ucznia do otrzymania oceny **dostatecznej**.*

Wymagania rozszerzające (R) obejmują treści:

- umiarkowanie przystępne,
- bardziej złożone i mniej typowe,
- przydatne, ale nie niezbędne na danym i wyższym etapie kształcenia,
- pośrednio użyteczne w życiu,
- wymagające rozwiązywania zadań teoretycznych i praktycznych, typowych, złożonych, o przeciętnym stopniu trudności.

*Wypełnienie wymagań podstawowych i rozszerzających uprawnia ucznia do otrzymania oceny **dobrej**.*

Wymagania dopełniające (D) obejmują treści:

- złożone i nietypowe,
- nasycone problemami teoretycznymi i praktycznymi,
- wymagające uzasadnień,
- wymagające rozwiązywania zadań teoretycznych i praktycznych, nietypowych, złożonych o dość wysokim stopniu trudności.

*Wypełnienie wymagań podstawowych, rozszerzających i dopełniających, to znaczy pełnych wymagań programu, uprawnia ucznia do otrzymania oceny **bardzo dobrej**.*

Uczeń, który spełnia pełne wymagania programu na najwyższym poziomie umiejętności, tzn. wśród opanowanych przez niego treści programowych występują umiejętności oryginalne, twórcze lub polegające na samodzielnym łączeniu wiedzy z różnych działów matematyki lub różnych przedmiotów nauczania *uzyskuje uprawnienia do oceny **celującej***. Można powiedzieć krótko, że **uczeń spełnia wymagania dla mistrzów (M)**.

Zadania typu **(M)** nie powinny dotyczyć każdej umiejętności; trzeba, żeby były oryginalne i interesujące dla uczniów zdolnych, a liczba zadań była dostosowana do sytuacji dydaktycznych.

Propozycje uszczegółowionych wymagań – umiejętności – na poszczególne stopnie szkolne są zamieszczone na początku każdego rozdziału w podręczniku: *MATEMATYKA dla uzupełniającego liceum ogólnokształcącego i technikum uzupełniającego* Wydawnictwo NOWIK, Opole 2008.

Ewaluację osiągnięć uczniów — sprawdzanie i ocenianie — należy traktować jako nieodłączny składnik procesu dydaktycznego, spełniający rolę motywacyjną i dający informację zwrotną o jakości zaprojektowanego procesu kształcenia.

Oceniać to rozpoznawać postępy ucznia i porównywać je z wymaganiami edukacyjnymi. Uczniowi trzeba wskazywać umiejętności, które opanował, wiedzę, którą przyswoił poprawnie, a zauważone braki w wiadomościach i umiejętnościach wykorzystywać w bieżącym doskonaleniu procesu dydaktycznego.

Ocena pełni funkcję klasyfikującą i diagnostyczną. Jest jednocześnie, a może przede wszystkim, informacją o postępach ucznia, jego uzdolnieniach, napotykanych trudnościach i zainteresowaniach oraz stanowi solidną podstawę informacji przekazywanych rodzicom i administracji szkolnej.

Ocenianie powinno być procesem ciągłym występującym na wszystkich etapach kształcenia matematycznego. Gdy przyjrzymy się zadaniom nauczyciela, polegającym na kierowaniu procesem uczenia się uczniów, powinniśmy zauważyć ścisłą zależność między nauczaniem, sprawdzaniem i ocenianiem osiągnięć uczniów.

Warto pamiętać, że w toku postępującego procesu dydaktycznego zakres ewaluacji osiągnięć uczniów poszerza się, natomiast kurczą się możliwości dokonania zmian w zaplanowanym przebiegu tego procesu tak, aby założone cele zostały osiągnięte. Ważne więc jest dostatecznie wczesne sprawdzanie i ocenianie. Najlepiej rozpocząć je od wstępnej diagnozy stanu osiągnięć niezbędnych do dalszego kontynuowania kształcenia matematycznego.

Diagnoza osiągnięć umożliwia indywidualizację nauczania ukierunkowaną na udzielanie pomocy najslabszym i wczesne usamodzielnianie najlepszych.

System oceniania w nauczaniu matematyki ma sprzyjać:

- dostarczaniu bieżącej informacji uczniowi o poziomie jego osiągnięć edukacyjnych i postępach w tym zakresie, rodzicom — o postępach ich dzieci, a nauczycielom — o poziomie osiągnięć w zakresie zaplanowanych celów,
- motywowaniu ucznia do dalszego kształcenia się,
- przyzwyczajaniu ucznia do systematycznej pracy, samokontroli i samooceny,
- pobudzaniu rozwoju intelektualnego ucznia,
- rozwijaniu zainteresowań matematycznych,
- posługiwaniu się matematyką w życiu codziennym.

Sprawdzanie i ocenianie należy tak organizować, aby angażowało uczniów w jego proces. Można to osiągnąć, gdy uczniowie są poinformowani o tym, co, kiedy i w jaki sposób będzie sprawdzane i oceniane, gdy nie ma ono charakteru represyjnego, lecz jest w pełni określone i daje rzetelną informację oraz możliwość poprawy.

Informacji do ewaluacji osiągnięć uczniów dostarczają nauczycielowi:

- obserwacje indywidualnej, zespołowej i zbiorowej pracy uczniów,
- prowadzenie dyskusji z pojedynczymi uczniami, z zespołem lub z całą klasą,
- wypowiedzi ustne na dany temat, udział w dyskusji, ustne sprawozdania lub wygłoszenie referatu,

- krótkie sprawdziany pisemne badające mały fragment wiedzy lub pojedyncze umiejętności,
- standaryzowane testy osiągnięć szkolnych,
- prace klasowe w postaci wypracowań obejmujących większy zakres materiału nauczania,
- prace projektowo-badawcze (długoterminowe).

Ewaluacja osiągnięć ucznia to przeżycie emocjonalne, które motywuje lub zniechęca do nauki. Motywacja uczniów zwiększa się, gdy wymagania są związane z ich potrzebami i zainteresowaniami, a także gdy mają odpowiedni poziom trudności. Ocena osiągnięć ucznia musi być sprawiedliwa — jak podkreślał prof. W. Okoń — w odczuciu nauczyciela, ucznia i jego kolegów.

Systematyczne sprawdzanie i ocenianie motywuje ucznia do pracy, a nauczycielowi umożliwia poznanie, jaki nastąpił przyrost wiedzy i umiejętności poszczególnych uczniów.

Ważnym czynnikiem w nauczaniu jest skuteczne motywowanie uczniów. Aby je osiągnąć należy:

- zadbać o to, aby lekcje były atrakcyjne dla uczniów,
- zająć się indywidualnymi i zespołowymi celami uczenia się oraz pomóc uczniom pomyślnie dojść do tych celów,
- nauczać treści warte opanowania i to w sposób, który pomoże uczniom dostrzec ich wartość.

Warto dodać, że uczniowie z większym prawdopodobieństwem sięgną po wartościowsze strategie uczenia się i dojdą do lepszych wyników, jeśli w czynności dydaktyczne angażować się będą z uwagi na cele dydaktyczne, a nie popisowe i kiedy będzie im zależało głównie na zrozumieniu tego, czego się uczą, a nie na odpowiedzi na presję zewnętrzną.

Ocenianie z matematyki powinno uwzględniać dwa aspekty: dydaktyczny i społeczno-wychowawczy. Aspekt dydaktyczny jest dla każdego nauczyciela oczywisty, gdyż obejmuje sprawdzanie i ocenianie wiadomości i umiejętności w odniesieniu do wymagań programowych. Aspekt społeczno-wychowawczy obejmuje aktywność ucznia na lekcjach, systematyczność i samodzielność wykonywania prac domowych oraz wykonywanie zadań dodatkowych, które są dostosowane do możliwości ucznia. Biorąc pod uwagę te kryteria, można wpłynąć na postępy uczniów w nauczaniu matematyki.

Dużo uwagi wymaga dobór lub konstrukcja zadań na sprawdziany i prace klasowe. Zadania powinny być starannie przygotowane zgodnie z poziomami wymagań, tak aby każdy uczeń mógł rozwiązać w całości i poprawnie te z nich, które korespondują z jego programem uczenia się; program ten nie musi być programem pełnym.

Tematyka prac pisemnych powinna zawierać zadania z każdego poziomu wymagań, tak aby także słabszy uczeń miał szansę rozwiązać kompletnie przynajmniej zadania o najniższym stopniu trudności. Większa liczba zadań z poziomu wymagań podstawowych, które są osiągalne dla wszystkich uczniów, pozwoli na dalszą skuteczną edukację. Dla przykładu zamieszczono zestaw zadań na pracę klasową oraz zestaw zadań na sprawdzian pisemny.

Praca klasowa: Związki miarowe w figurach płaskich

1. Pole trójkąta równobocznego wynosi $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz długość boku tego trójkąta. (3 pkt)
2. Z materiału w kształcie kwadratu o boku 1,8 m wycięto okrągły obrus o maksymalnej powierzchni. Oblicz, ile ozdobnego sznura potrzeba na obszycie brzegu obrusa. (Wynik podaj z dokładnością do 0,1 dm.) (4 pkt)
3. Wykreśl romb, wiedząc, że jedna z jego przekątnych ma długość 6 cm, a wysokość 3 cm. (5 pkt)
4. Punkty A , B i C należą do okręgu. Cięciwa AB ma długość 14 cm, AC — 10 cm, a odległość punktu C od prostej AB jest równa 6 cm. Oblicz długość cięciwy BC . (8 pkt)
5. Obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równy 24 cm, a przekątna ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole trapezu. (10 pkt)
6. W kwadracie zawiera się pięć kół o promieniu 1 cm i parami rozłącznych wnętrzach. Jaką najmniejszą długość ma bok tego kwadratu? (10 pkt)

Uwaga! Należy rozwiązać pięć dowolnych zadań. Czas pracy 45 minut.

Sprawdzian pisemny: Funkcja kwadratowa

1. Naskicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 - 3$. (2 pkt)
2. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = -x^2 + bx + c$ jest liczba -1 , a $f(0) = 1$. Sporządź wykres tej funkcji. (4 pkt)
3. Obwód prostokątnej działki wynosi 100 m. Jakie największe pole może mieć ta działka? (6 pkt)

Uwaga! Należy rozwiązać dwa dowolne zadania. Czas pracy 15 minut.

W ocenie prac pisemnych należy uwzględniać nie tylko poprawność rozwiązania zadania, ale również metodę i oryginalność. O ocenie końcowej pracy powinna decydować, oprócz liczby uzyskanych punktów (w przypadku oceny punktowej), liczba poprawnie rozwiązanych zadań lub ich podpunktów.

Korzystanie ze standaryzowanych testów osiągnięć szkolnych wyposażonych w kartoteki sprawdzanych umiejętności umożliwia szybką, a przy tym dokładną analizę sprawdzanych umiejętności w zakresie dostępnym pomiarowi.

Prace projektowo-badawcze, często wykonywane w dłuższym czasie, pozwalają sprawdzić umiejętności trudne do sprawdzenia tradycyjnymi metodami. Wymagają bowiem obserwacji sytuacji, sformułowania problemu, zbierania informacji z różnych źródeł, porządkowania zebranych informacji, wnioskowania, dokonania uogólnień, uzasadniania oraz komunikowania nauczycielowi wyników pośrednich i końcowych.

Podstawową rolę w ewaluacji osiągnięć ucznia przypisuje się kontroli ciągłej, bieżącej i bieżącej w toku kolejnych lekcji. Ocena osiągnięć ucznia obejmuje nie tylko treści kształcenia, lecz także umiejętności uniwersalne, takie jak skuteczne komunikowanie się, wykonywanie zadań we współpracy, planowanie i ocenianie własnego uczenia się czy posługiwanie się nowymi technologiami.

Sprawdzanie i ocenianie osiągnięć ucznia powinno mieć cechy ewaluacji holistycznej, to znaczy powinno być oparte na tworzeniu obrazu osiągnięć jako całości, w którym bierzemy pod uwagę specyficzne i indywidualne cechy ucznia, jego umiejętności i zaangażowanie oraz przebieg nauki i dynamikę rozwoju. Wymagania należy określać i planować w scenariuszach (konspektach) lekcji, a więc ich ustalenie powinno wyprzedzać realizację treści; dotyczy to także sprawdzianów i prac klasowych.

Wskazane jest opracowanie wymagań do całego programu. Jest to pracochłonne, ale konieczne ze względu na wymogi wewnątrzszkolnego systemu oceniania. Uczeń powinien być poinformowany o zakresie wymagań przed rozpoczęciem nauki. Ponadto takie podejście sprzyja podniesieniu obiektywizacji oceny szkolnej. Należy przy tym pamiętać, że osiągnięcia uczniów dają nauczycielowi informację zwrotną w celu doraźnej zmiany koncepcji i bieżącego doskonalenia procesu dydaktycznego. Proces dydaktyczny nauczania matematyki należy traktować dynamicznie, a nie statycznie; pracujemy z uczniem, który jest podmiotem naszych zainteresowań, a nie przedmiotem, który można kształtować według skrupulatnie założonych celów.

Aby nauka szkolna była przyjemna i pasjonująca, należy dobrze dopasować program do zainteresowań i zdolności, a nauczyciel będzie wspierał uczenie się bezpośrednio. Jeżeli nauczyciel właściwie uczy właściwych rzeczy, nie musi zabiegać o motywację.

VI Propozycja rozkładu materiału

Realizacja programu *Matematyka bliżej nas* w liceum i technikum uzupełniającym wymaga minimum 6 godzin tygodniowo w całym cyklu kształcenia.

LICEUM UZUPELNIAJĄCE

Klasa I: 36 tygodni \times 3 godziny = 108 godzin

Klasa II: 27 tygodni \times 3 godziny = 81 godzin

RAZEM: 189 godzin

Klasa	Lp	Dział	Godz.
I	1	Liczby i zbiory	30
	2	Planimetria	22
	3	Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa	31
	4	Elementy statystyki	9
	5	Wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze i logarytmy*	12
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	4
II	6	Wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze i logarytmy	24
	7	Ciągi liczbowe	12
	8	Geometria analityczna	14
	9	Stereometria	10
	10	Rachunek prawdopodobieństwa	12
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	9

* Proponuje się podzielenie realizacji działu **Wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze i logarytmy** na klasę I i II, np. w klasie I – **Wielomiany i funkcje wymierne**, a w kl. II **Funkcje wykładnicze i logarytmy**.

TECHNIKUM UZUPELNIAJĄCE

Klasa I: 36 tygodni \times 2 godziny = 72 godzin

Klasa II: 36 tygodni \times 2 godziny = 72 godzin

Klasa III: 27 tygodni \times 2 godziny = 54 godzin

RAZEM: 198 godzin

Klasa	Lp	Dział	Godz.
I	1	Liczby i zbiory	30
	2	Planimetria	22
	3	Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa*	15
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	5
II	4	Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa	16
	5	Wielomiany i funkcje wymierne Funkcje wykładnicze. Funkcje logarytmiczne	32
	6	Elementy statystyki	9
	7	Ciągi liczbowe	12
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	3
III	8	Geometria analityczna	14
	9	Stereometria	10
	10	Rachunek prawdopodobieństwa	12
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	18

* Proponuje się podzielenie realizacji działu **Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa** na klasę I i II, np. w klasie I – **Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa**, a w kl. II **Funkcja kwadratowa**.

Propozycję szczegółowego rozkładu materiału – z rozbiciem na poszczególne jednostki lekcyjne można znaleźć na stronie **Wydawnictwa NOWIK** – www.nowik.com.pl.

Spis treści

Wstęp.....	3
I. Cele kształcenia.....	6
II. Materiał kształcenia i umiejętności oczekiwane.....	7
III. Umiejętności konieczne.....	14
IV. Procedury osiągania celów.....	17
V. Wymagania programowe i ewaluacja osiągnięć uczniów.....	20
VI. Propozycja rozkładu materiału.....	26