

LICZBY RZECZYWISTE

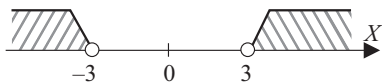
2. b) $NWD(210, 900) = 30$, $NWW(210, 900) = 6300$;
 c) $NWD(126, 58) = 2$, $NWW(126, 58) = 3654$.
3. 210.
4. a) $3n$, $n \in N$; b) $3n+2$, $n \in N$.
5. a) $10a+b$, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$; b) $10a+2b$; c) $21b$, $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
6. a) 0; b) -590 ; c) -27 .
9. a) $\frac{1}{2}$; b) 9.
10. $\frac{9}{2}$.
13. a) $c = -1$, $c = -3$; b) $c = -5$, $c = -4$;
14. a) 7; b) -27 ; c) -3 ; d) -2 .
15. a) 2^3 ; b) 2^8 ; c) $2^{-\frac{71}{6}}$; d) $7^{\frac{4}{5}}$.
16. $2^{40} \cdot 4^{20} = 4^{40} = 2^{80} = 16^{20}$, $2^{100} = 4^{50} = 2^{20} \cdot 4^{40} = 16^{25}$.
17. $\frac{1}{4}$.
19. e b a c d.
20. a) $3^9 < 243^2 < 27^4$; b) $2^{21} < 5^{12} < 9^9$; c) $(-11)^{15} < (-3)^{21} < (-7)^9$.
21. Wszystkie.
22. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{3\sqrt{7}}{14}$; d) $\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$; e) $\sqrt{3}+1$; f) $\frac{7\sqrt{3}(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{6}$.
23. $b > a$.
24. a) W ; b) NW ; c) W ; d) W ; e) W ; f) NW .
26. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{875}{999}$; c) $\frac{9}{11}$; d) $\frac{1}{30}$; e) $\frac{13}{6}$; f) $2\frac{13}{99}$.
28. $\{0, 1, 2\}$
 $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
 $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
 $\{0, 1\}$
 $\{1\}$.
29. a) $(-2, 3)$; b) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; c) $(8, +\infty)$; d) \emptyset .
30. a) $A \cup B = (-3, 4)$, $A \cap B = (1, 2)$, $A \setminus B = (-3, 1)$, $B \setminus A = (2, 4)$;
 b) $A \cup B = (1, 6)$, $A \cap B = (3, 5)$, $A \setminus B = (1, 3)$, $B \setminus A = (5, 6)$;
 c) $A \cup B = (-\infty, 2)$, $A \cap B = (-\infty, 0)$, $A \setminus B = (0, 2)$, $B \setminus A = \emptyset$;
 d) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = (2, 3) \cup (6, 8)$, $B \setminus A = \emptyset$;
 e) $A \cup B = (-5, -3) \setminus \{-4\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$;
 f) $A \cup B = (-3, 3)$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = (-3, 2)$, $B \setminus A = (2, 3)$.

32. a) $p > 0$; b) $p > 0$; c) $p < 0$.

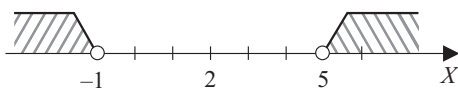
33. a) $p = x + 9$; b) $p = 10$; c) $p = -2x + 9$; d) $p = -x + 1$; e) $p = 10$; f) $p = 7x - 1$; g) $p = 2x - 1$; h) $p = -5x + 32$.

34. Rys. 1 $|x| \leq 2$
 rys. 2 $|x - 3| \leq 5$
 rys. 3 $|x| \geq 2$
 rys. 4 $|x + 3| \leq 5$
 rys. 5 $|x - 5| \leq 3$
 rys. 6 $|x - 3| \geq 5$.

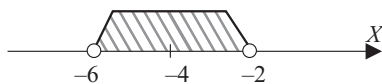
35. a)



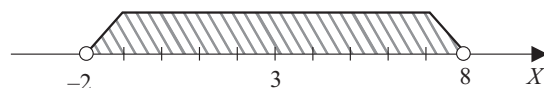
b)



c)



d)



36.

Z niedomiarem	Przybliżenie z niedomiarem	Błąd	Błąd
7,1212121	7,121	$2,121 \cdot 10^{-4}$	$2,978 \cdot 10^{-5}$
3,9759759	3,975	$9,759 \cdot 10^{-4}$	$2,455 \cdot 10^{-4}$
17,4735473	17,474	$5,473 \cdot 10^{-4}$	$3,132 \cdot 10^{-5}$
	Przybliżenie z nadmiarem	Błąd	Błąd
7,1212121	7,122	$7,879 \cdot 10^{-4}$	$1,106 \cdot 10^{-4}$
3,9759759	3,976	$2,41 \cdot 10^{-5}$	$6,061 \cdot 10^{-6}$
17,4735473	17,474	$4,527 \cdot 10^{-4}$	$2,591 \cdot 10^{-5}$

37. a) $5,5 < x + y < 5,7$; b) $7,36 < x \cdot y < 7,92$; c) $-1 < x - y < -0,8$; d) $\frac{23}{33} < \frac{x}{y} < \frac{3}{4}$.

38. 7,32.

39. 105%.

40. a) 300; b) 90.

41. a) 20; b) 40; c) 60.

42. 40.

43. a) 11 592,74; b) 15 000; c) 3.

44. a) 3; b) 3; c) 0; d) 1; e) -1; f) -2; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{4}$; i) $\frac{1}{2}$; j) 3; k) $-\frac{1}{2}$; l) 3.

45. a) 8; b) 81; c) 2; d) $2\sqrt{2}$.

46. a) 2; b) 3; c) $\sqrt{5}$; d) $x > 0$ i $x \neq 1$; e) $x = 7$; f) $x = \frac{1}{2}$.

47. a) 2; b) 2; c) 7; d) 25; e) 4; f) $\frac{1}{2}$.

48. a) 10; b) 5; c) 8; d) 15.

49. a) $x \in (1, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; c) $x \in (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$;

d) $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; e) $x \in (3, +\infty)$;

f) $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

50. $\log_5 100 = \log_5 5 + \log_5 20 = 2 + \log_5 4 = \log_5 25 + \log_5 4 = 1 + \log_5 20 = 2 \log_5 10 = \frac{\log_3 100}{\log_3 5}$.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. a) $\frac{a}{3}$; b) a^3 ; c) $-a$; d) $a^2 + \frac{1}{2}a$; e) $(a+b)(a-b)$; f) $\frac{2a}{a+b}$; g) $a > 2$; h) $a \geq 3$;
i) $a \leq 0$; j) $a = 2b^2$; k) $a + b + 1 = \frac{a}{b}$.

2. a) $3a^2 + 5a$; b) $5a^2 + 7b^2 + 3a^2b + 7ab$.

3. a) $9a - 3b$; b) $-5a^2 + 5a$; c) $ab - 2b - 2a^2$; d) $11a - 7b + 4a^2$; e) $-a - 3b + 14$;
f) $a^2 + ab - 2b^2$; g) $-a^2 - 6a$; h) $a^2 - 5a + ab - 3b + 6$.

4. b) $4a^2 + 12a + 9$; c) $a^2 - 10a + 25$; d) $4a^2 - 2a + \frac{1}{4}$; e) $a^2 - 1$; f) $a^2 - 3$
g) $4a^2 - 25$; h) $\frac{a^2}{9} - 9$.

5. b) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; c) $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$; d) $8a^3 - 4a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{27}$.

6. a) $(a+5)^2$; b) $(a-3)^2$; c) $9a^2 - 1$; d) $(a+2)^3$; e) $(2a+3)^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$;
f) $(a-5)(a^2 + 10a + 25) = a^3 - 125$; g) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$; h) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$;
i) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$; j) $(x+2)^3$; k) $(3x+1)^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$;
l) $(2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$.

7. a) $24a$; b) $9a^3 - 15a^2 + 9a - 2$.

8. a) 2496; b) 961; c) 384; d) 99 999 999; e) 6000002.

9. a) $(a-b)^3$; b) $(x^3 + y^3) \cdot (x^2 - y^2)$; c) (w zad. powinno być: iloraz sześcianu) $\frac{(p+q)^3}{p-q}$.

10. a) $-\frac{4}{3}$; b) $-\frac{4}{3}$; c) $-\frac{8}{3}$; d) $-\frac{73}{125}$; e) $86 + 88\sqrt{3}$.

11. a) $a = 11, b = -6$; b) $a = 10, b = 2$; c) $a = 26, b = 15$; d) $a = 45, b = -29$.

12. a) $6(x+2y+1)$; b) $x(5x^2+7)$; c) $8x^3(3x^4-x^2+2)$; d) $(x+5)(x+2)$.

13. a) $(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; b) $3(x-2)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$;
c) $(3x+5)(2x^2+5)$; d) $(x+3)(\sqrt{5}x^2-1)$.

14. a) $(x-3)(x+3)$; b) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$; c) $(2x-5)(2x+5)$; d) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$;
e) $(x-2)(x^2+2x+4)$; f) $(x+3)(x^2-3x+9)$; g) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$;
h) $(x-7)^2$; i) $(x+2)^3$; j) $(5-x)^3$.

15. a) $(x+5)(x+2)$; b) $(x-3)(x-4)$; c) $4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (2x+3)(2x-1)$;

d) $\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

16. a) $(1+x+y)(1-x-y)$; b) $(2-x+y)(2+x-y)$.
17. a) $W(\sqrt{2}) = -10 - 2\sqrt{2}$; b) $W\left(\frac{1}{2}\right) = -9\frac{11}{16}$.
18. Pierwiastek $W(x)$: -2 .
19. a) 22; b) 2; c) 14.
20. a) $W(\sqrt{3}-1) = 7\sqrt{3}-7$; b) $W(3k) = 54k^3 - 9k^2 + 9k - 10\sqrt{3} + 20$;
c) $W(k+1) = 2k^3 + 5k^2 + 7k - 10\sqrt{3} + 24$.
21. a) $W(2x) = 16x^3 - 4x^2 + 6x - 10\sqrt{3} + 20$; b) $W(x+\sqrt{3}) = 2x^3 + (6\sqrt{3}-1)x^2 + (21-2\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 17$.
22. a) $m=2$; b) $m=0$; c) $m=-2$; d) $m=-54$.
23. $a=2$, $b=-2$.
24. a) $a=3$, $b=-2$; b) $a=-1$, $c=-10$;
c) nie istnieją współczynniki a , b aby dane wielomiany były równe.
25. a) $4x^3 - 9x^2 + 31x - 18$; b) $3x^3 - 4x^2 - 12x - 7$; c) $-2x^3 + 8x^2 + 16x + 7$; d) $26x^2 - 81x + 81$.
26. a) -3 , $\frac{5}{3}$, 4; b) 2, 5, -5; c) 0, -2, 3; d) -3.
27. a) -2 , $\frac{7}{5}$, 4; b) -4 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; c) -3 , 3, 4;
d) (w zad. powinno być $x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$) 7;
e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{5}$; f) -4.
28. a) 0; b) $-\frac{125}{49}$; c) $\frac{1609\sqrt{3}-3029}{529}$; d) nie istnieje.
29. a) $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{-7, 2, 7\}$.
30. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $9x$; b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{x+1}{3}$; c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, $\frac{7(x-1)}{5(x-5)}$;
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$; e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -2\}$, $\frac{x+2}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}$;
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\frac{x^2-3x+9}{(x+3)^2}$.
31. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -5\}$, $\frac{(5-x)(25x-1)}{x^2-5x+25}$;
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$, $\frac{-(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)}$;
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $x-3$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{10x-1}{2x-1}$;
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\frac{x^2+4x-2}{x+3}$; f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+5}{x+2}$;
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$, 15; h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$, $\frac{5x+4}{3(x-4)(x+2)}$.

32. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $5x^3 + 2x^2$; b) $D = \mathbf{R}$, $19x$; c) $\mathbf{R} \setminus \{0, -3, 3\}$, $\frac{-3}{2x^2}$;

d) $\mathbf{R} \setminus \{0, -1, 1\}$, $\frac{3(x^3 - x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 1}$.

33. a) $\frac{4x - 41}{x^2 - 3x - 10}$; b) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$.

34. a) $\frac{11}{2}$; b) \emptyset ; c) $\frac{35}{12}$; d) \emptyset .

35. a) -2 ; b) $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$;

c) (w zad. powinno być: $-\frac{1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$) $\frac{8}{3}$; d) 9.

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

- 1.** 1) 13; 2) 4; 3) 2; 4) -2; 5) 10; 6) 17; 7) \emptyset ; 8) $(0, +\infty)$; 9) $\langle 3, +\infty \rangle$; 10) $\langle 1, +\infty \rangle$;
11) -1, 2; 12) \emptyset ; 13) $\frac{1}{2}$; 14) $(-\infty, -1) \cup \langle 2, +\infty \rangle$; 15) $(-\infty, -2) \cup \langle 3, +\infty \rangle$; 16) $\left\langle \frac{1}{4}, 1 \right\rangle$,
17) R ; 18) 2.
- 2.** 1) 0, 3; 2) 0, 4, -2; 3) -3, -2, 2; 4) -3; 5) -3, 1, 3; 6) $-3, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$;
7) -2 (pierwiastek podwójny), 2; 8) $\frac{5}{2}$; 9) $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}$; 10) $\sqrt{7}, -\sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7}$.
- 3.** a) $x > 5$; b) $x < 7$.
- 4.** a) $|x| < 2$; b) $|x| > 2$; c) $|x-1| < 2$; d) $|x-1| \geq 2$; e) $|x-4| \leq 3$; f) $|x+2| \geq 4$.
- 5.** a) $x^2 - x - 6 < 0$; b) $x^2 - 6x + 5 > 0$; c) $x^2 < 0$; d) $(x+2)^2 > 0$.
- 6.** a) $R \setminus \{-3\}$; b) $R \setminus \{1, 3\}$; c) $(-\infty, 5)$; d) $(-\infty, -2) \cup \langle 4, +\infty \rangle$; e) $(1, 2)$.
- 7.** -2, 2.
- 8.** a) $\frac{2^{40}-1}{4}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\sqrt{7}$; d) $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$.
- 9.** a) -1, -5; b) 7, 3; c) -7, -1; d) -5, -1.
- 10.** a) $(-5, -1)$; b) $(-\infty, 3) \cup \langle 7, +\infty \rangle$; c) $\langle -4, 8 \rangle$; d) $(-\infty, -7) \cup \langle -1, +\infty \rangle$;
e) $(4, 6)$; f) $(-\infty, -5) \cup \langle -3, +\infty \rangle$.
- 11.** b) $|x-7| < 4$; c) $|x-1| \leq 3$; d) $|x-1| > 2$.
- 12.** b) 4; c) 5; d) \emptyset ; e) -1, 1; f) $-\frac{7}{8}$; g) -7; h) 1, 4.
- 13.** a) $(4, -2)$; b) $(2, -4)$; c) $(2, 5)$; d) $(8, 3)$; e) $(-3, 4)$; f) $(-6, -6)$.
- 14.** b) $(-2, -1)$ $(1, 2)$; c) $\left(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}\right)$ $(3, 2)$; d) $(-5, -13)$ $(-1, -1)$.

FUNKCJE

1. a) Tak; b) nie; c) nie; d) tak; e) nie; f) tak; g) tak; h) nie; i) tak; j) nie; k) tak; l) tak.

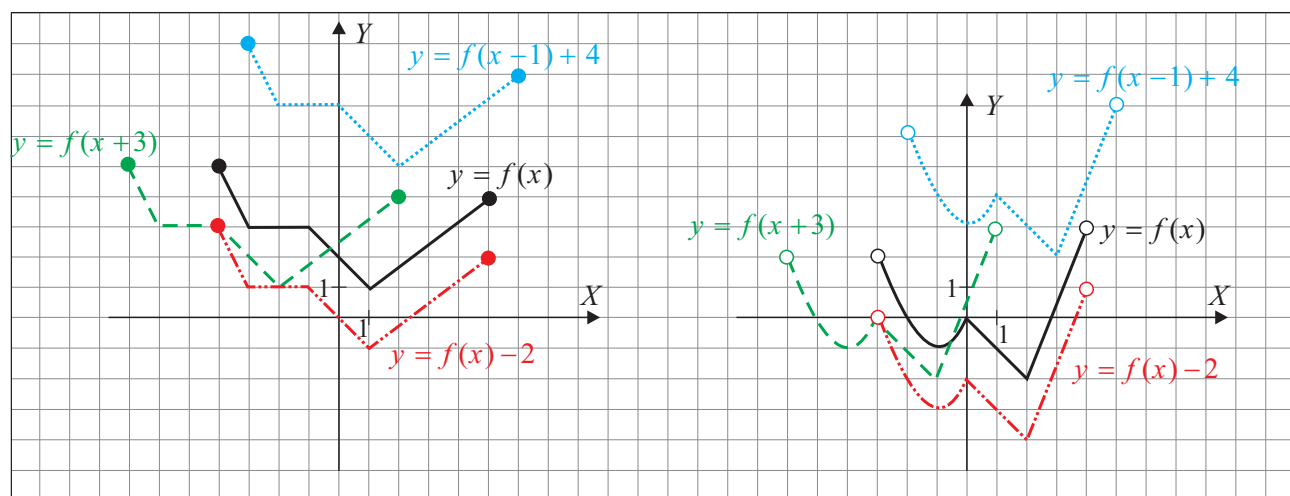
2. Należy wykreślić zdania:
 „Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.”
 „Najmniejszą wartością funkcji jest 5.”
 „Funkcja jest malejąca.”

3.

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
- Funkcja jest nierosnąca.
- Zbiorem wartości funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcja nie osiąga wartości największej.

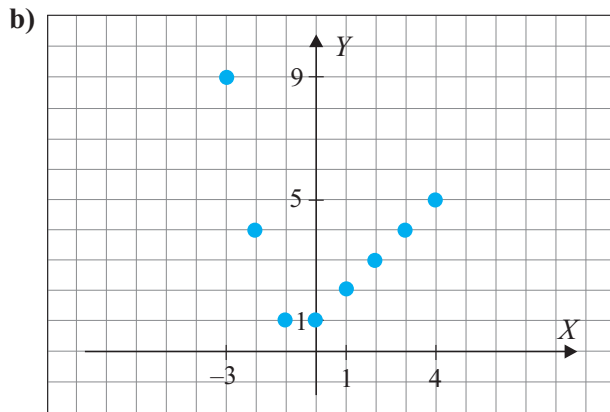
4. a) $D = (-4, 4)$, $y \in (-2, 2)$, $x = 2$ – miejsce zerowe,
 funkcja rosnąca dla $x \in (-4, -2) \cup \langle 1, 4)$, funkcja stała dla $x \in (-2, 1)$;
 b) $D = (-\infty, 2)$, $y \in \langle -4, 2)$, $x = 1$ – miejsce zerowe,
 funkcja rosnąca dla $x \in \langle -1, 2)$, funkcja malejąca dla $x \in (-\infty, -1)$;
 c) $D = \langle -2, +\infty)$, $y \in \langle 0, +\infty)$, $x = -2$ – miejsce zerowe,
 funkcja rosnąca dla $x \in \langle -2, 0) \cup \langle 4, +\infty)$, funkcja stała dla $x \in \langle 0, 3)$;
 funkcja malejąca dla $x \in (3, 4)$;
 d) $D = \langle -6, -3) \cup (-3, +\infty)$, $y \in \langle -1, +\infty)$, $x = -6\frac{1}{2}$ – miejsce zerowe,
 funkcja rosnąca dla $x \in \langle -6, -4)$, funkcja malejąca dla $x \in (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$.

6.



7. a) $g(x) = f(x-4)$; b) $g(x) = f(x)-3$; c) $g(x) = f(x+1)+1$; d) $g(x) = 2(x+2)^2 - 3$.

8. a) $\{9, 4, 1, 2, 3, 5\}$; c) $x = -1, x = 0$



9. a) Wzdłuż osi OX o 3 jednostki w lewo.

b) Wzdłuż osi OY o 7 jednostek w górę.

c) Wzdłuż osi OX o 2 jednostki w prawo i wzdłuż osi OY o 5 jednostek w górę.

d) Wzdłuż osi OX o 8 jednostek w lewo i wzdłuż osi OY o 4 jednostki w dół.

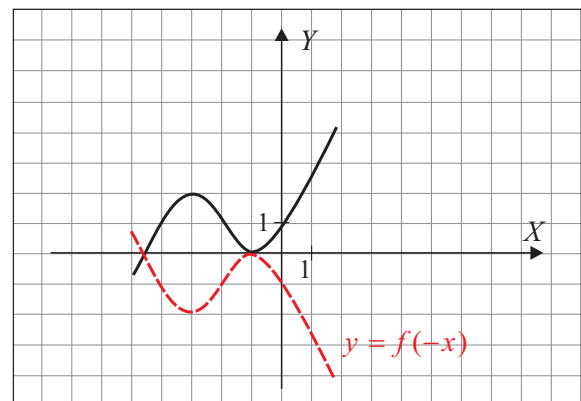
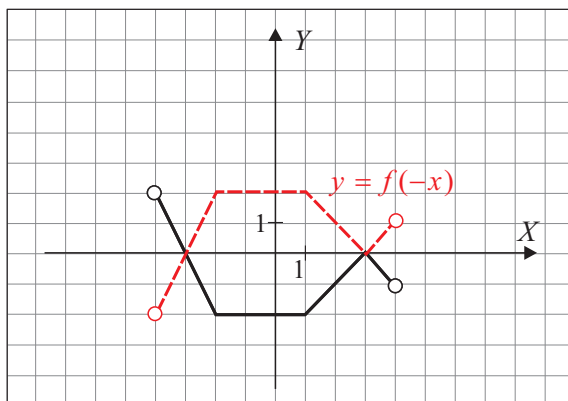
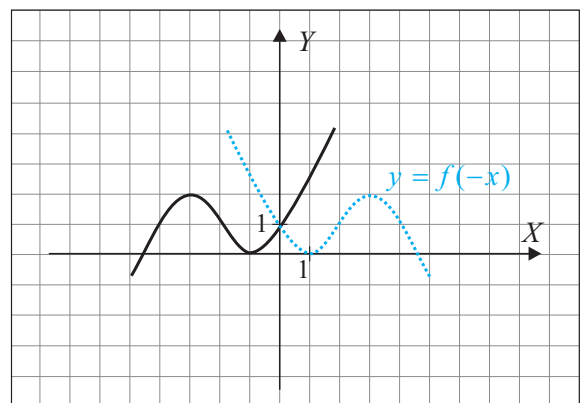
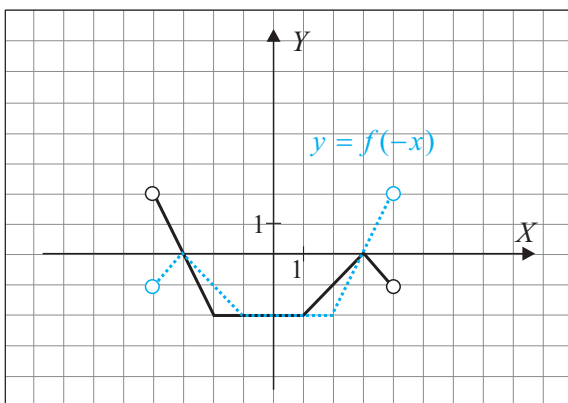
e) Symetria względem osi OX .

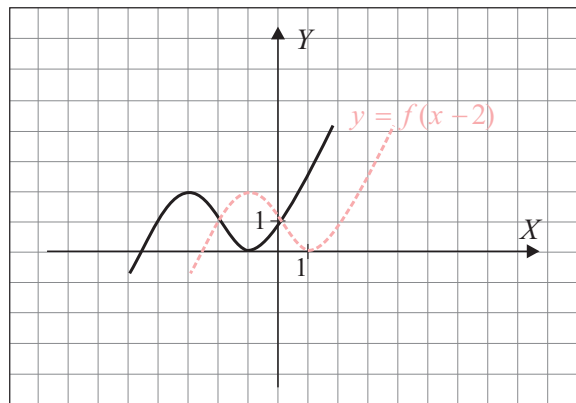
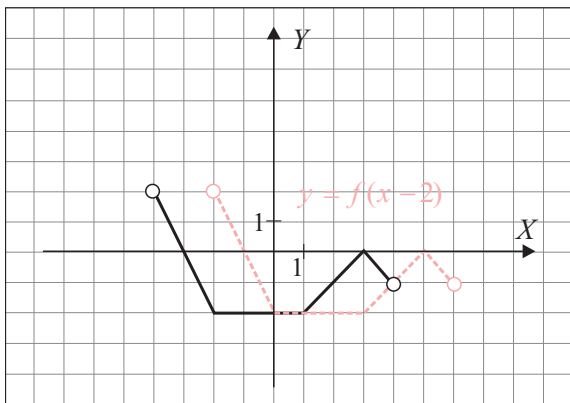
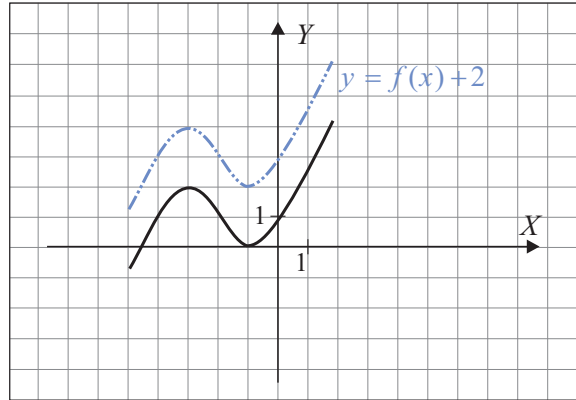
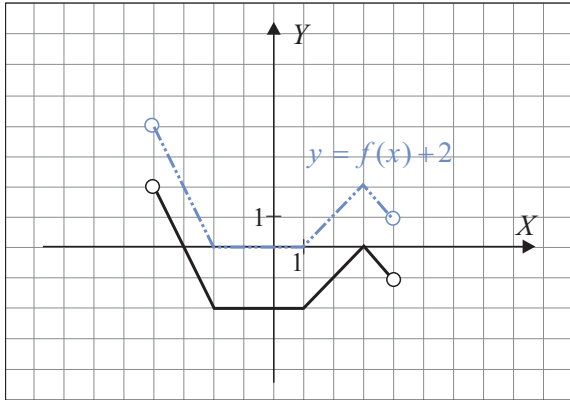
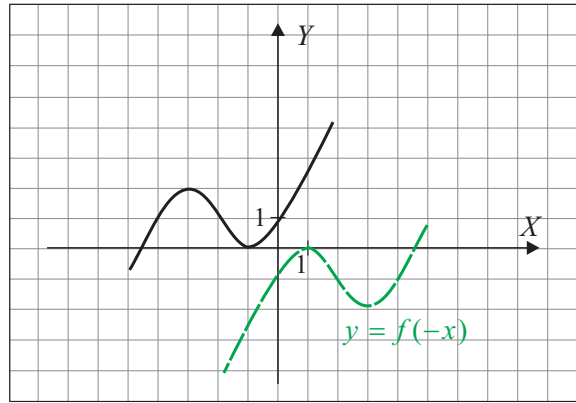
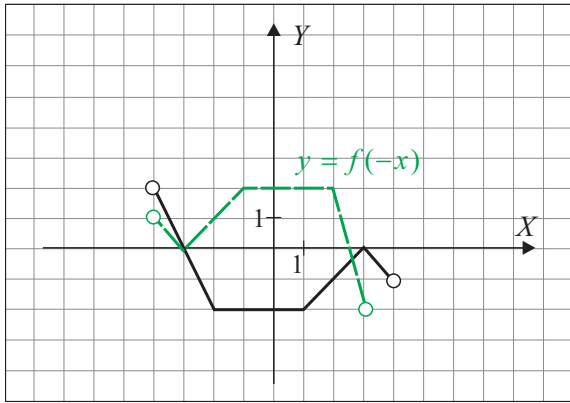
f) Symetria względem osi OY .

10. a) $f(3,14) = 3, f(1) = 1, f(1,2) = 1, f(2,75) = 2, f(-5) = -5, f(-4,11) = -5, f(0) = 0$;

b) C.

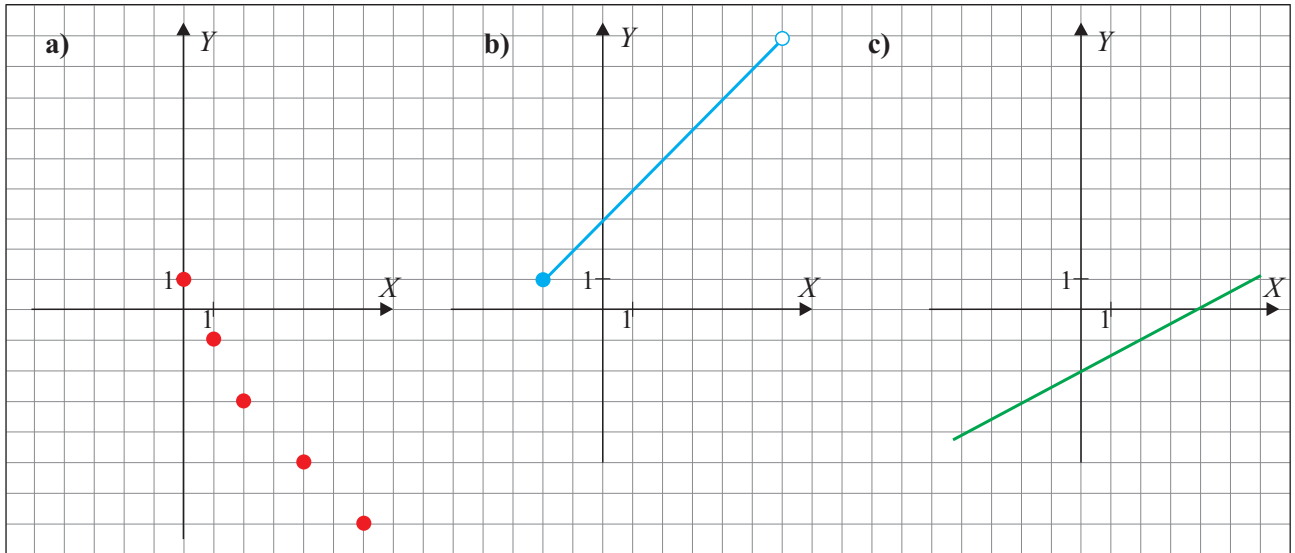
11.



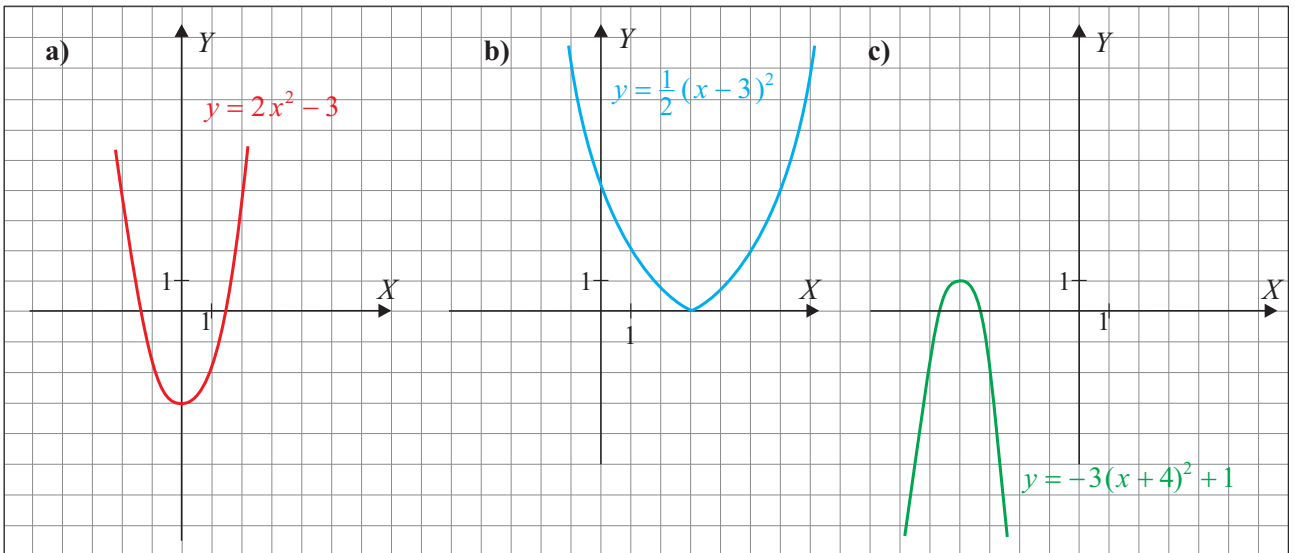


12. a) $f(0) = 4, f(1) = 1, f\left(-\frac{2}{3}\right) = 6, f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{5}, f(-k) = 3k + 4;$
 b) $f(0) = 1, f(1) = -1, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, f(-k) = k^2 + 3k + 1, f(k-1) = k^2 - 5k + 5;$
 c) $f(0) = 3, f(2) = 1, f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{7}{3}, f(k^2) = \frac{3}{k^2 + 1}, f(k-1) = \frac{3}{k}.$
13. a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\};$
 b) $\{-2, -1, 2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79\};$
 c) $\{1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9\}.$
14. a) $\{18, 11, 6, 3, 2\};$
 b) $\{16, 9, 4, 1, 0\};$
 c) $\{16, 9, 4, 1, 0\};$
 d) $\{-16, -9, -4, -1, 0\}.$

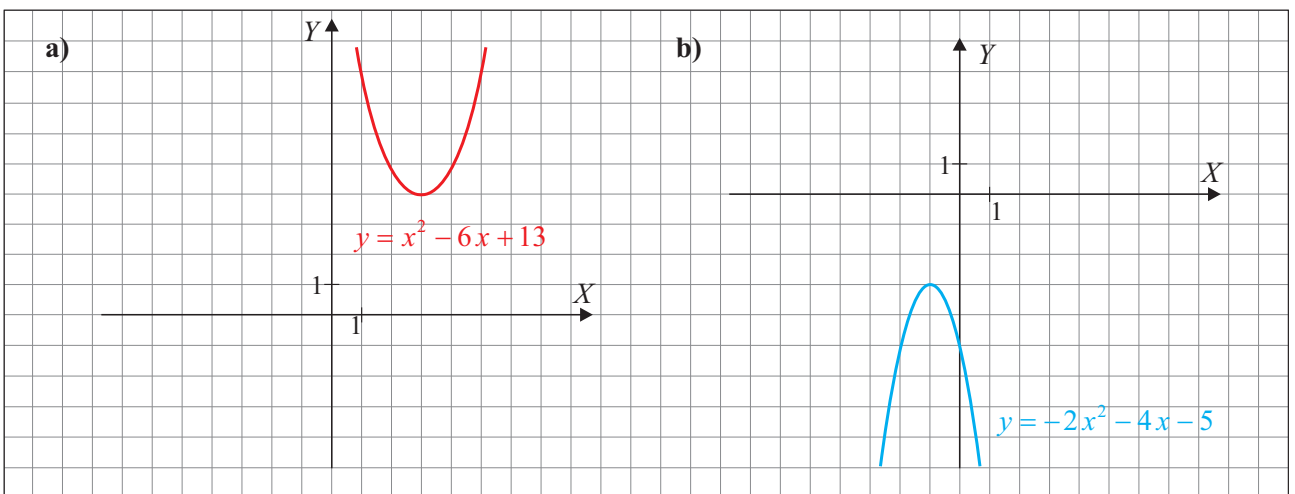
15.



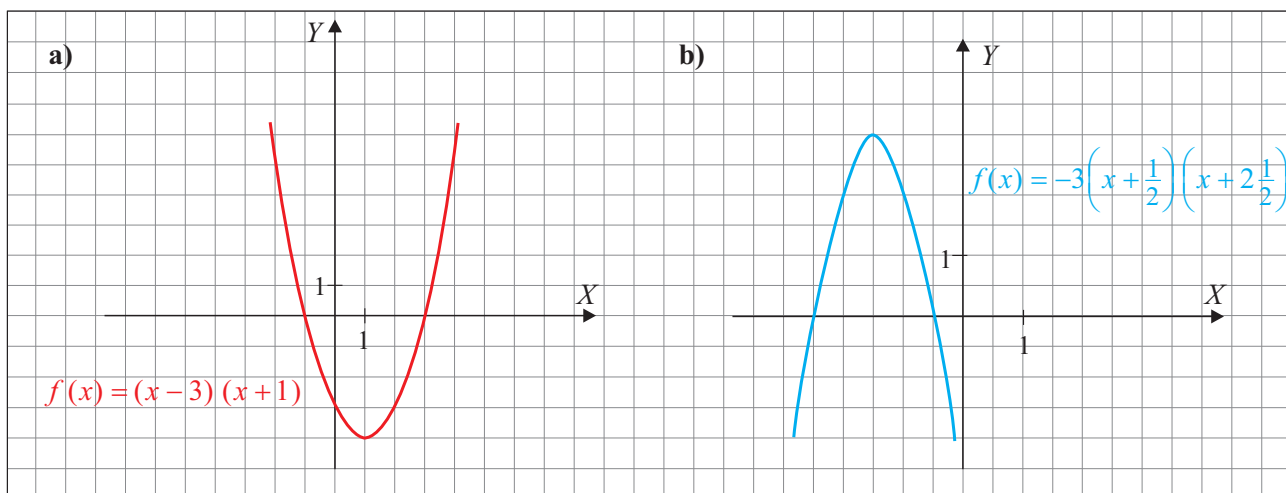
16.



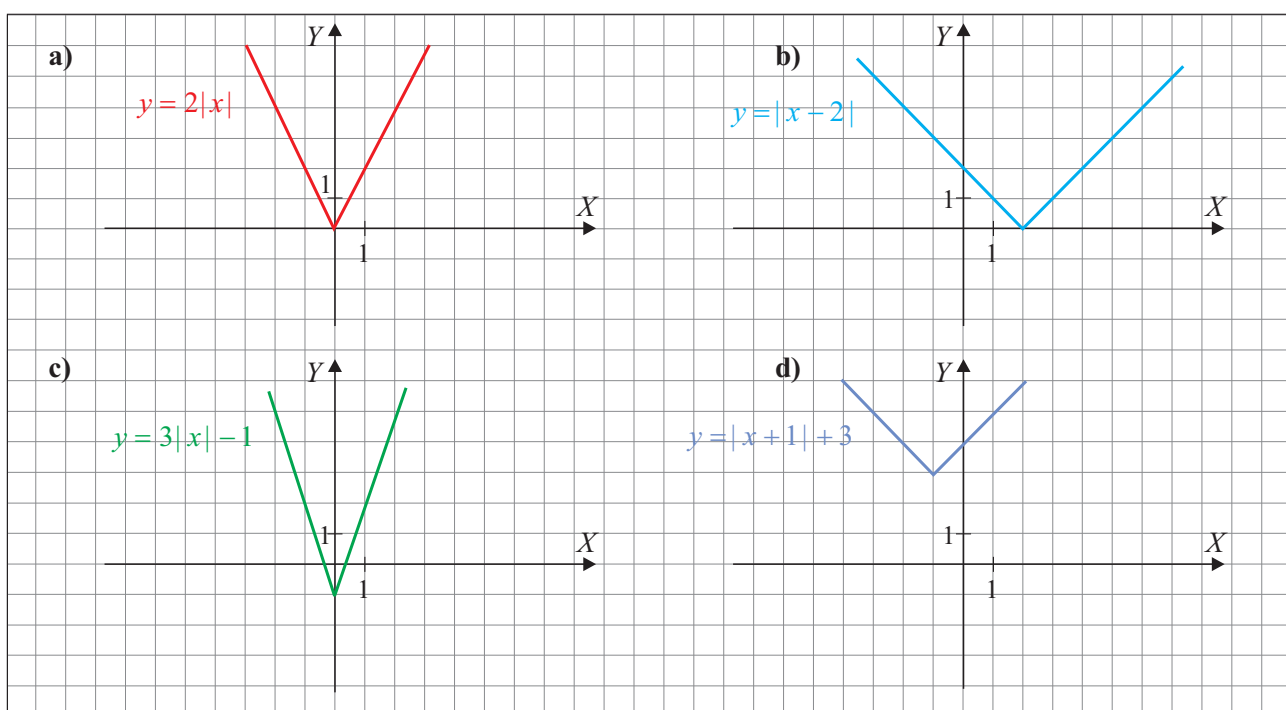
17.



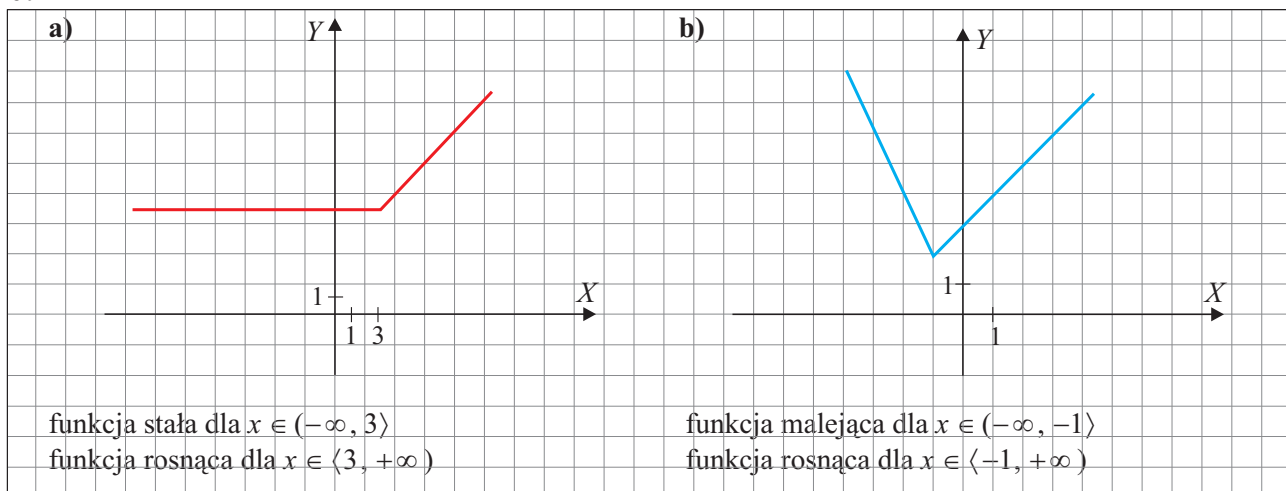
18.



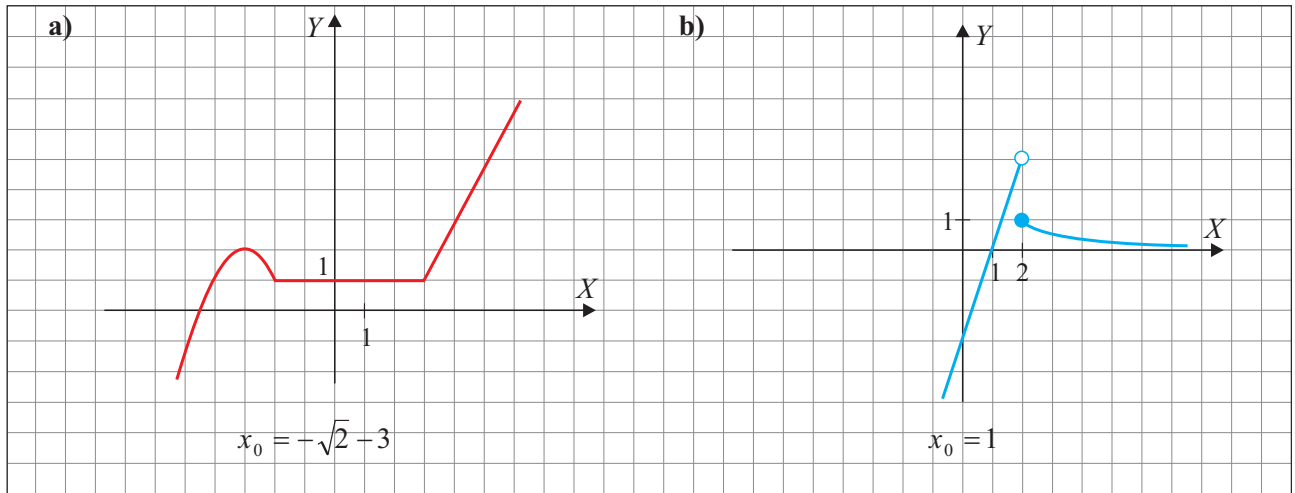
19.



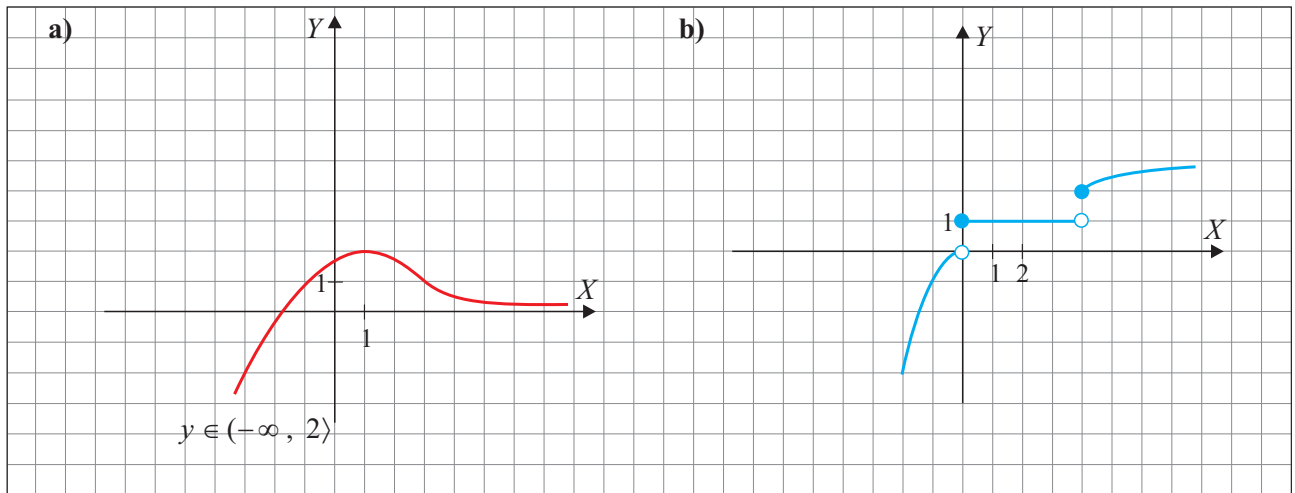
20.



21.

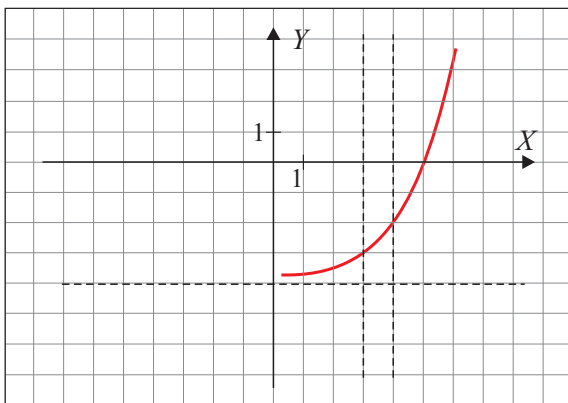


22.



23. a) $\frac{11}{2}$; b) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$; c) \emptyset ; d) $-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{7}$; e) \emptyset ; f) -1 ; g) 4 ; h) $-2, 2, 3$;
 i) -5 ; j) \emptyset .

24. $D = \mathbf{R}$, $y \in (-4, +\infty)$, $x_0 = 5$.



25. a) \mathbf{R} ; b) $\langle 3, +\infty \rangle$; c) $\langle -20, +\infty \rangle$.

26. $g(x) = -1 + \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$, $D = (-3, +\infty)$, $y \in \mathbf{R}$, $x_0 = -2\frac{1}{2}$.

27. a) $\frac{7}{3}$; b) 0; c) $\frac{11}{3}$; d) $\frac{7-\sqrt{3}}{3}$; e) $x > \frac{7}{3}$; f) $x < \frac{9}{4}$.

28. a) Brak miejsc zerowych, $OY: (0, 4)$, funkcja przyjmuje wartości rzeczywiste dla $x \in \mathbf{R}$;
b) $x_0 = 15$, $OY: (0, 5)$, funkcja przyjmuje wartości rzeczywiste dla $x \in (-\infty, 15)$.

30. $m = 7$.

31. $m = -\frac{7}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

34. $-\frac{5}{16}$.

35. $x = \frac{3}{4}$.

36. a) Wartość najmniejsza -6 , wartość największa 10 ;
b) wartość najmniejsza -8 , wartość największa 10 ;
c) wartość najmniejsza -8 , wartość największa -6 ;
d) wartość największa 10 , wartość najmniejsza -6 .

37. $y = -2x^2 + 4x + 6$.

38. $y = -2x^2 + 8x + 10$.

Ciagi liczbowe

1. $(5, 7, 9, 11, 13)$, $(1, 4, 7, 10, 13)$, $(4, 4, 4, 4, 4)$, $(4, 8, 16, 32, 64)$, $\left(1, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{7}{15}\right)$.
2. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 2\frac{1}{2}$, $a_7 = 6\frac{1}{2}$, $a_{20} = 20\frac{1}{2}$.
3. $b_1 = 1\frac{1}{2}$, $b_3 = 3\frac{5}{8}$, $b_5 = 5\frac{9}{32}$.
4. a) $a_{n+1} = 2n + 3$, $a_{n+2} = 2n + 5$, $a_{3k} = 6k + 1$;
b) $a_{n+1} = 2 - 3n$, $a_{n+2} = -1 - 3n$, $a_{3k} = 5 - 9k$;
c) $a_{n+1} = n^2 - 2n - 3$, $a_{n+2} = n^2 - 4$, $a_{3k} = 9k^2 - 12k$;
d) $a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$, $a_{n+2} = \frac{n}{n+2}$, $a_{3k} = \frac{3k-2}{3k}$;
e) $a_{n+1} = 4^n$, $a_{n+2} = 4^{n+1}$, $a_{3k} = 4^{3k-1}$.
5. a) a_3 ; b) a_4 ; c) żaden wyraz nie jest równy zero; d) a_3 ; e) a_1, a_5 .
6. a_2, a_3 .
7. a) a_7, a_8, a_9, \dots ;
b) a_6, a_7, a_8, \dots ;
c) a_3, a_4, a_5 .
8. a_1, a_2, a_3, a_4 .
9. a) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$;
b) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 9$
10. a) 343; b) 140.
11. a) $n^3 - 3n^2 + 3n - 3$;
b) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$.
12. a) $a_n = n$;
b) $a_n = 2n - 1$;
c) $a_n = \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$;
d) $a_n = 4n^2 - 4n + 1$.

Ciąg arytmetyczny

1. a) $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$;
b) $(-2, -4, -6, -8, -10, -12, -14)$;
c) $\left(\frac{22}{3}, \frac{23}{3}, 8, 8\frac{1}{3}, 8\frac{2}{3}, 9, 9\frac{1}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$;
d) $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{3}{2}\pi, -2\pi, -\frac{5}{2}\pi, -3\pi, -\frac{7}{2}\pi\right)$.
2. a) $x = 7, y = 9, z = 11$;
b) $x = 4, y = 6, z = 7$;
c) $x = 3\frac{2}{3}, y = 4\frac{1}{3}, z = 5\frac{2}{3}$;
d) $x = 3\frac{1}{2}, y = 4, z = 4\frac{1}{2}$.
3. a) $-16, 49$; b) $14, 20$; c) $2, 10$; d) $6, 5$; e) $1, 4$.
4. a) Tak; b) tak; c) tak; d) nie; e) nie.
5. a) $a_n = 7 - 2n$;
b) $a_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$;
c) $a_n = 8 - n$;
d) $a_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$.
6. a) 2500; b) 424; c) 0; d) -6806 .
7. a) $S_{10} = 115$; b) $S_{10} = 195$; c) $S_{10} = \frac{-115}{6}$.
8. 2730.
9. 5550.
10. 1335.
11. 4340.
12. 3240.
13. $a_n = 2n + 1$.
14. a) $a_1 = 7, r = 14$;
b) $a_1 = 8, r = 10$.
15. a) $x = 171$; b) $x = 99$; c) $x = 27$.
16. $a_1 = 2$.

Ciąg geometryczny

1. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128;
b) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$;
c) 1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625;
d) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$;
e) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{32}{3}, -\frac{64}{3}$.
2. a) $x = 64, y = 512$;
b) $x = 2\sqrt{2} \wedge y = 16\sqrt{2}$ lub $x = -2\sqrt{2} \wedge y = -16\sqrt{2}$;
c) $x = 2, y = 4$.
3. a) (2, 4, 8);
b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\right)$;
c) $(\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5})$.
4. a) $a_6 = \frac{1}{256}, S_6 = \frac{1365}{64}$;
b) $n = 9, S_9 = 2(15\sqrt{2} + 31)$;
c) $a_1 = \frac{1}{64}, S_6 = \frac{63}{64}$;
d) $n = 10, a_{10} = \frac{1}{512}$.
5. $(a_n), (d_n), (e_n)$.
6. a) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$;
b) $a_n = \frac{4}{3^{n-1}}$;
c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
7. Dowód. Skorzystaj z własności: $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$.
8. a) $q = 2$; b) $x = 5$.
9. $a_1 = \frac{10}{11}, a_3 = \frac{40}{11}$.
10. (4, 8, 16).
11. 4.
12. $x = 35$ lub $x = -35$.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

1. $x = 9, y = 16, z = 32$ lub $x = 9, y = 16, z = -32$.
2. $(4, 12, 20), (28, 12, -4)$.
3. $(7, 16, 25), (34, 16, -2)$.
4. $(1, 3, 5)$.
5. $r = -7$ lub $r = 6$.
6. $(57, 57, 57)$ lub $(3, 21, 147)$.

TRYGONOMETRIA

1. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$;
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 2$;
c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$;
d) $\sin \alpha = \frac{x}{z}$, $\cos \alpha = \frac{y}{z}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{y}{x}$.
2. a) $h = \frac{9}{2}$; b) $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; c) $h = 12\sqrt{2}$; d) $h = 6$.
3. a) $x = 12 \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ = 14,3$, $y = \frac{12}{\sin 40^\circ} = 18,7$;
b) $x = 19$, $y = 6,24$;
c) $x = 42,6$, $y = 38,6$;
d) $x = 29,4$, $y = 24,7$.
4. a) -1 ; b) $3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) $-\frac{23}{12}$.
5. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{26\sqrt{6}}{9}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$; d) $36\sqrt{3}$.
6. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.
7. a) $\cos \alpha$; b) $2\sin \alpha$; c) $\cos \alpha$; d) $\sin \alpha$.
8. a) Nie; b) tak; c) tak; d) tak.
9. $P = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha| \neq L$.
10. a) $L = 12(\sqrt{3} + 1)$; b) $L = 18 + 12\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$; c) $L = 18(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$.
11. a) $L = 4(6 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$; b) $L = 6(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$; c) $L = 12(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.
12. 4,59 m.
13. $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$.
14. $d = 2\sqrt{3}$.
15. $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$.
16. $a = 16$, $b = 12$.
17. $P = 108\sqrt{7} \text{ cm}^2$, $L = 12(3 + \sqrt{7}) \text{ cm}$.

18. Powinno być w zadaniu: ...bok AB ma długość a i jest 4 razy krótszy od boku AC .

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4a \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot a^2 \wedge P_{\Delta} = a^2 \sqrt{3} \Rightarrow a^2 \sqrt{3} = a^2 \cdot 2 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

19. $d = 6$ cm.

20. a) $|MN| = 16$ cm; **b)** $\operatorname{tg} \angle MBA = \frac{1}{2}$.

21. a) $h = 19,2$ cm; **b)** $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

22. $a = 18$, $b = 54$, $P = 648$ cm², $L = 144$ cm.

23. a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; **b)** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; **c)** $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

24. $m \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$.

25. $m \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right)$.

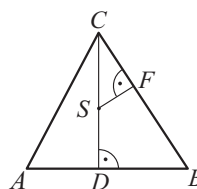
26. a) $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $f(x) = \sqrt{3}x + 1$; **b)** $P_1(0, 1)$, $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$.

27. $1\frac{5}{6}$.

28. $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$, $W(x) = x(x + 1)(x - 2)$, liczby a , b , c są pierwiastkami wielomianu $W(x)$.

PLANIMETRIA

1. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$; b) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 160^\circ$; c) $\alpha = 126^\circ$, $\beta = 252^\circ$.
3. $|\angle A| = 60^\circ$, $|\angle B| = 80^\circ$, $|\angle C| = 40^\circ$.
4. a) $\alpha = 300^\circ$, $\beta = 30^\circ$; b) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 20^\circ$; c) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 40^\circ$; d) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
9. $|\angle BAC| = 50^\circ$, $|\angle ACB| = 55^\circ$, $|\angle ACD| = 105^\circ$, $|\angle ADC| = 25^\circ$.
10. a) Tak *bbb*; b) nie; c) tak *kbb*; d) nie.
14. $|AE| = \frac{32}{7}$, $d = \frac{4}{7}\sqrt{15}$.
15. $|DS| = 10$, $L_{\Delta ABS} = 48$ cm, $P_{\Delta ABS} = 64\sqrt{3}$ cm².
16. $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $P_{ABCD} = 96$ cm², $P_{A'B'C'D'} = 170\frac{2}{3}$ cm².
17. $a = 5,6$, $c = 10,6$, a) $L_{\Delta ABC} = 25,2$ cm; b) $R = 5,3$ cm; c) $r = 2$ cm; d) $d = \frac{53}{15}$;
e) $\sin \alpha = \frac{28}{53}$; f) $h = 4\frac{40}{53}$.
18. a) Z warunków zadania wynika, że D jest środkiem boku BC i $DE \perp AB \Rightarrow E$ jest środkiem odcinka $AB \Rightarrow |AE| = |BE|$. Na podstawie cechy *kbb* $\Delta EBD \cong \Delta EAD$;
b) $|AB| = 16$ cm, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 20$ cm.
20. $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$, $P_{\square} = c^2$, $\frac{\frac{1}{2}ab}{c^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow c^2 = 4ab$, $\text{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, $\text{ctg} \beta = \frac{a}{b}$,
 $\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \beta = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4$.
21. $|BD| = 16$, $|BC| = 20$, $|CD| = 12$, $|SC| = 6$,
 $\Delta BDC \sim \Delta SFC$ (*bbb*) $\Rightarrow \frac{|SF|}{6} = \frac{16}{20} \Rightarrow |SF| = 4,8$ cm.
a) $|SF| = 4,8$ cm; b) $P_{\Delta ABC} = 192$ cm²;
c) $P_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4 \cdot R} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 32}{4R} = \frac{3200}{R}$.
- Z porównania pól trójkątów: $192 = \frac{3200}{R} \Rightarrow R = 16\frac{2}{3}$ cm, $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}r(20 + 20 + 32) = 36r$.
Z porównania pól trójkątów: $192 = 36r \Rightarrow r = 5\frac{1}{3}$ cm,
 $\frac{P_R}{P_r} = \frac{\pi(16\frac{2}{3})^2}{\pi(5\frac{1}{3})^2} = \left(\frac{50}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^2 = \left(\frac{50}{16}\right)^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$.
22. $L = 28,8$ cm, $P = 34,56$ cm².
23. $h = 6$, $P = 39$ cm², $L = (5\sqrt{13} + 13)$ cm.
24. $\alpha = 30^\circ$.
25. $|AB| = |AC| = \frac{m\sqrt{5}}{5}$, $|BC| = \frac{m\sqrt{10}}{5}$.
26. $L = 2a(\sqrt{2} + 1)$, $P = a^2$.



27. $r = 3(2 - \sqrt{2})$ cm.
28. $a = 12\sqrt{3}$, $L = 36\sqrt{3}$ cm.
29. $h = 6(\sqrt{3} - 1)$, $P = 72(\sqrt{3} - 1)$ cm².
30. $P = 80$ cm².
31. $P = 108$ cm².
33. (Uwaga: W treści zadania powinno być: dwusieczna jego kątów).
 $L = 12\sqrt{13}$ cm, $P = 108$ cm².
34. $d_1 = 12\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm, $d_2 = \frac{12}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ cm.
35. $P = 108\sqrt{3}$ cm².
36. W rombie $ABCD$, $|AC| = 32$, $|AB| = 20$, $|BD| = 24$. Pole rombu jest równe 384 cm².
 $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = 384$, zaś pole rombu jest równe $P = 20 \cdot 20 \cdot \sin \alpha = 400 \sin \alpha$.
 Z porównania pól $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.
 Odp. $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.
37. $a = 10\sqrt{2}$, $KLMN$ jest kwadratem.
38. $\frac{P_r}{P_k} = \frac{8}{\pi}$. Bok rombu ma długość $4r$, pole jest równe: $P = 4r \cdot 4r \cdot \sin 30^\circ = 8r^2$. Pole koła: $P = \pi r^2$.
40. $|AB| = 6$.
41. $|CD| = \sqrt{14}$.

GEOMETRIA NA PŁASZCZY NIE KARTEZJAŃSKIEJ

1. a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 150^\circ$; c) $\alpha = 120^\circ$.
2. a) $y = \sqrt{3}x + 4 + 2\sqrt{3}$; b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6 + \sqrt{3}$; c) $y = -x + 2$.
3. a) $y = x + 3$, $x - y + 3 = 0$; b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{13}{3}$, $-x + 6y + 26 = 0$.
4. a) $|AB| = 6\sqrt{2}$, $S_{AB} = (-6; 13)$; b) $|AB| = 13$, $S_{AB} = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$.
5. a) Np. $y = \sqrt{5}x$, $y = \sqrt{5}x - 2$, $y = \sqrt{5}x + 11$; b) np. $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + 2$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - 1$.
6. a) $y = -3x + 16$; b) $y = -3x - 6$; c) $y = -3x + 1 + 3\pi$.
7. a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; c) $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{7}$.
8. $y = 3x - 6$.
9. Jeden punkt.
10. a) $m = -18$; b) $m = -1$.
11. $A = \frac{1}{2}$.
12. $p = 7 \vee = -3$.
13. $p = 1\frac{1}{4} \vee = \frac{3}{4}$.
14. Sym. AB . $y = -6x + 8$.
15. $m = -\frac{5}{2}$, $m \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.
16. $y = -\frac{6}{5}x + 6$, $y = \frac{6}{5}x + 6$,
17. $y = -\frac{1}{2}x - 2$,
18. $y = -2x + 12$.
19. $D = (-2, 3)$, $|AB| = 3\sqrt{5}$, $|BD| = \sqrt{5}$.
20. $y = -5x - 2$.
21. a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$; b) $(x + 1)^2 + y^2 = 3$.
22. a) $(x - 7)^2 + (y + 14)^2 = 72$; b) $(x + 5)^2 + y^2 = 85$.
23. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

24. a) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$;
 b) $(x-7)^2 + (y+7)^2 = 49$ lub $(x+7)^2 + (y+7)^2 = 49$;
 c) $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ lub $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$.
25. $d > r$, prosta k jest rozłączna z okręgiem.
26. $S = (1, -2)$, $r = 2$, $d = \sqrt{2}$, prosta ma 2 punkty wspólne z okręgiem.
27. a) $P_{\Delta} = 4\sqrt{3}$, b) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
28. a) ΔABC jest prostokątny; b) $P_{\Delta} = 24$; c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.
29. $k: y = \frac{1}{4}x$, $x^2 + y^2 = 36$.
30. a) $D = (0, 2)$.
31. $k \parallel m \Leftrightarrow a = 6$, $l \perp m \Leftrightarrow a = -\frac{8}{3}$.
32. a) Prosta $AB: y = x - 4$; b) $y = -x + 4$; c) $C = (2, 2)$ lub $C = (6, -2)$.
33. $C = (12, 0)$ lub $C = (-6, 2\sqrt{3})$.
34. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 52$.

STEREOMETRIA

GRANIASTOSŁUPY I OSTROSŁUPY

1. a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$.

2. a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$.

6. a) $x = 2\sqrt{57}$; b) $x = 3\sqrt{19}$; c) $x = 12\sqrt{2}$.

7. a) $x = 4\sqrt{3}$; b) $x = \frac{8\sqrt{15}}{3}$; c) $x = 6\sqrt{3}$.

8.

Granistosłupy				
Liczba ścian	11	12	10	$\frac{n}{2} + 2$
Liczba krawędzi	27	30	24	$\frac{3}{2}n$
Liczba wierzchołków	18	20	16	n

Ostrosłupy				
Liczba ścian	11	12	13	n
Liczba krawędzi	20	22	24	$2(n-1)$
Liczba wierzchołków	11	12	13	n

9. $x = a\sqrt{3}$.

10. $\alpha = 60^\circ$.

11. $125 : 1$.

12. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; c) $x = \frac{1}{2}a$.

13. a) $V = 160\sqrt{3}$, $P = 32\sqrt{3} + 240$; b) $V = 540\sqrt{3}$, $P = 108\sqrt{3} + 360$; c) $V = 288$, $P = 48 + 96\sqrt{6}$.

14. a) $V = 18\sqrt{11}$, $P = 9\sqrt{3} + 27\sqrt{15}$; b) $V = 288\sqrt{14}$, $P = 144\sqrt{15} + 144$; c) $V = 324$, $P = 54\sqrt{3} + 162$.

15. $\begin{cases} a = 8 \\ h = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 9\frac{1}{3} \\ h = 7\frac{1}{3} \end{cases}$.

16. $P = \frac{1183}{16} + \frac{507}{4} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}$.

17. $V = 32$, $P = 72$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

18. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. $h = 36\sqrt{11}$.

20. $V = 3072$.

21. $\alpha = 30^\circ$

23. $P = 432 + 144\sqrt{2}$, $V = 864$.

24. $\cos \alpha = 0,99$.

25. $V = 6912\sqrt{3}$.

26. $P = 304$.
27. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17} \sqrt{34}$.
28. $V = 1120\sqrt{39}$.
29. $V = 16\sqrt{6}$, $P = 32\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 16\sqrt{6}$.
30. a) $V = 720$;
31. $V = 144\sqrt{3}$, $P = 72(1 + \sqrt{2})$.
32. a) $P_b = 16\sqrt{3}$; b) $V = \frac{32 \cdot \sqrt{2}}{3}$; c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
33. $V = \frac{1152\sqrt{2}}{3}$, $P = 336$.
34. $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.
35. $V = 400$, $P = 290 + 10\sqrt{61}$.
36. $P = 4a^2 + 4\sqrt{2}a^2 + \frac{\sqrt{143}}{2}a^2$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{16}$, $\cos \beta = \frac{4\sqrt{143}}{143}$.
37. $P_b = \frac{a^2}{\cos \alpha}$, $H = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2}$.
38. $P_b = \frac{6}{5}(\sqrt{30} + \sqrt{255})$, $V = \frac{12\sqrt{15}}{5}$.
39. $P = a^2 \left(4 + 4\sqrt{\frac{17}{4\cos^2 \alpha} - 4} + \sqrt{\frac{17}{4\cos^2 \alpha} - \frac{1}{4}} \right)$, $x = 10a + \frac{2\sqrt{17}}{\cos \alpha}$.
40. $V = \frac{20}{3}\sqrt{102}$, $x = 32 + \frac{8}{3}\sqrt{102}$.
41. $\cos \beta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2}$, $\cos \gamma = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{4 + \cos \alpha}$
42. $P_b = \frac{3a^2 \sin \alpha}{4}$, $V = \frac{a^3 \sqrt{3 \sin^2 \alpha - 1}}{24}$.
43. $V = 162\sqrt{3}$.
44. $P_b = \frac{\sqrt{21}a^2}{8}$.
45. $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$.
46. a) $P_b = 192 + 12\sqrt{91}$; b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.
47. a) $P_b = 288 + 96\sqrt{3}$; b) $x = 36\sqrt{3} + 8\sqrt{39}$.
48. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$49. V = \frac{32a^3}{3}.$$

$$50. P_b = a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$51. P = 36\sqrt{2}.$$

BRYŁY OBROTOWE

$$1. \text{ a) } P = 75\pi, V = 25\sqrt{3}\pi; \quad \text{b) } P = 108\pi + 72\sqrt{3}\pi, V = 144\pi; \quad \text{c) } P = 128\pi(1 + \sqrt{2}), V = \frac{1024\sqrt{2}}{3}\pi;$$

$$\text{d) } P = \pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right), V = \frac{\pi l^3 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{3}.$$

$$2. \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{16}.$$

$$3. P_b = 16\sqrt{3}\pi.$$

$$4. V = \frac{729}{8}\pi.$$

$$5. V = 72\pi, P = 36\pi(1 + \sqrt{2}).$$

$$6. V = \frac{81\sqrt{7}\pi}{16}, P = 27\pi.$$

$$8. V = \frac{35\pi a^3}{3}.$$

$$9. V = \frac{s^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \pi}{12}, P = \frac{s^2 \cdot \cos \alpha \cdot \pi}{2(\sin \alpha + 1)^2}.$$

$$10. V = 162\pi, P = 72\sqrt{3}\pi.$$

$$11. \text{ a) } V = \frac{a^3\pi}{4}, P = \frac{3}{2}\pi a^2; \quad \text{b) } V = 2\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha, P = 2\pi r^2(1 + 2\operatorname{tg} \alpha); \quad \text{c) } V = \frac{h^3}{4\pi}, P = h^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi} \right).$$

$$12. \frac{V_1}{V_2} = k.$$

$$13. \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

$$14. \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}, \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}.$$

$$17. V = \frac{4}{3}\pi a^3, P = a^2\pi(3 + \sqrt{2}).$$

$$19. V = \frac{7168}{1029}\sqrt{14}\pi.$$

$$20. R = 10, r = 2.$$

ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

1. $x = 1$, $M_e = 5$.
2. $x = 8$, $M_e = 4$.
3. 30 uczniów w klasie, 9 otrzymało ocenę bdb.
4. $\bar{x} = 1,85$.
5. a) $\bar{x} = 1,3$; b) $M_e = 1$; c) $P(A) = \frac{496}{1785}$.
6. Średnia ważona obozu piłkarskiego i tenisowego jest równa i wynosi 5,909. Decyzja należy do Bartka.
7. b) $P(A) = \frac{213}{595}$.
8. a) $\bar{x} = 3058$ zł; b) $M_e = 3000$ zł; c) $P(A) = \frac{83}{100}$.
9. Nie.
10. $\bar{x} = 2,25$, $\sigma = 1,52$, $M_e = 1$.
11. $a = 6$, $b = 12$, $\sigma = 3,74$ lub $a = -9$, $b = 27$, $\sigma = 15$.
12. a) 8 osób; b) $\bar{x} = 1,1$.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

1. a) $2 \cdot 3 = 6$; b) 5.
2. 24.
3. 6.
4. 100.
5. 5.
6. 59280.
7. $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$.
8. 720. (W zadaniu powinno być: w dowolnej kolejności)
9. 28800.
10. a) 240; b) 480.
11. 210.
12. 48.
13. 2652.
14. 2704.
15. 100000.
16. 970200.
17. 128.
18. 720.
19. 81.
20. a) 120; b) 125.
21. 120.
22. 4.
23. 72.
24. 4536.
25. 300.
26. 225.
27. 2296.
28. $x = 0, y = 0$.
29. 4.
30. 30.
31. 16.

32. 25.
33. a) 1280; b) 6585600.
35. a) 20; b) 24.
36. a) 140; b) 35; c) 20.
37. 396.
38. a) 120; b) 48.
39. a) 39916800; b) 86400.
40. a) 479001600; b) 518400; c) 1036800.
41. a) 10000; b) 81.
42. 32.
43. 63.
44. 266. Z liczbą 4 jest możliwości $49 + 42 + 42 = 133$, z liczbą 8 jest także 133, ogółem 266 możliwości.
45. 54.
46. 12.
47. 30.
48. 192.
49. 6870.
50. a) 6; b) 151200; c) 3360.
51. $32!$.
52. a) $C_{12}^3 \cdot C_{18}^1 + C_{12}^4 = 4455$; b) $C_{20}^4 - C_{12}^4 = 4350$; c) $C_{20}^4 - C_{18}^4 = 1785$.
53. 240.
54. $C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 99$.
55. a) 15; b) 18.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. a) $\Omega = \{0, R\}$, $\overline{\Omega} = 2$; b) $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{0, R\}\}$, $\overline{\Omega} = 4$; c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\overline{\Omega} = 6$;
d) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\overline{\Omega} = 4$; e) $\Omega = \{1, 3, 5, 7\}$, $\overline{\Omega} = 6$;
f) $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, $\overline{\Omega} = 36$;
g) $\Omega = \{(x, y): x \in \{0, R\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, $\overline{\Omega} = 12$;
f) $\Omega = \{(x, y): x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, y \in \{0, R\}\}$, $\overline{\Omega} = 12$;
2. $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z \in \{0, R\}\}$, $A = \{(R, O, O), (O, R, O), (O, O, R)\}$,
 $B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, R, R)\}$,
 $C = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, R, R)\}$.
3. a) $P(A) = \frac{9}{64}$; b) $\frac{15}{32}$.
4. a) $\frac{3}{28}$; b) $\frac{15}{28}$.
5. $\frac{85}{323}$.
8. $\frac{5}{9}$.
10. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{8}$.
11. $\frac{15}{92}$.
12. $P(A) = \frac{5}{6}$, $P(A') = \frac{1}{6}$.
13. a) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$; b) $P(A' \cup B') = \frac{2}{3}$.
14. $P(A \setminus B) = \frac{2}{15}$.
15. $P(A \cap B) = \frac{7}{15}$.
16. $\frac{3}{10}$.
17. $\frac{2}{15}$.
18. $\frac{41}{100}$.
19. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{1}{36}$; c) $\frac{436}{504}$.
20. a) $\frac{560}{1111}$; b) $\frac{63}{1111}$.
21. $\frac{1}{2}$, $\overline{\Omega} = 5!$, $\overline{A} = 3!(4+3+2+1) = 60$.
22. $\frac{8188}{48828125}$.

23. a) $\frac{567}{31250}$; b) 1; c) $\frac{4599}{10000000}$; d) $\frac{1}{10^8}$.

24. a) $\frac{1}{17}$; b) $\frac{1}{272}$; c) $\frac{1}{17}$.

25. a) $\frac{1}{1428}$; b) $\frac{193}{204}$; c) $\frac{31}{4284}$.

26. $\frac{1}{3}$.

27. a) $\frac{13}{14}$; b) $\frac{66}{91}$.

28. $\frac{35}{81}$.

29. $\frac{1}{3}$.

30. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{9}$.

31. 0,756. $P(A) = 0,8 \cdot 0,84 + 0,2 \cdot 0,42 = 0,756$.