Maria Romanowska

UDOWODNIJ, ŻE...

PRZYKŁADOWE ZADANIA MATURALNE Z MATEMATYKI

Matematyka dla liceum ogólnokształcącego
i technikum
w zakresie podstawowym i rozszerzonym

Z E S Z Y T   M E T O D Y C Z N Y

Miejski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Opolu
Publiczne Liceum Ogólnokształcące Nr II w Opolu
Wydawnictwo NOWIK sp.j.

OPOLE 2012

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Od 2010 roku matura z matematyki jest obowiązkowa na poziomie podstawowym. W arkuszach maturalnych na poziomie podstawowym znajdują się zadania ze standardu piątego dotyczącego rozumowania i argumentacji, w których uczeń powinien prowadzić proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków. Sprawiają one najwięcej kłopotów, gdyż uczeń nie zawsze wie, od czego rozpocząć.

W arkuszu rozszerzonym także zawarte są dwa zadania ze standardu piątego, tzn. *zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność*.

Najtrudniejsze są zadania na dowodzenie z geometrii, dlatego że zdający powinien sporządzić rysunek, wprowadzić zgodne z założeniem oznaczenia, zauważyć kilka własności geometrycznych i wyodrębnić, co jest założeniem, a co tezą (w wielu przypadkach uczniowie traktują tezę jako założenie).

Twierdzenia matematyczne możemy dowodzić, stosując dwie metody: dowodzenie wprost i nie wprost. Można wykorzystać także zasadę indukcji matematycznej, nie została jednak ona objęta podstawą programową, dlatego nie będziemy jej rozpatrywać.

Aby stwierdzić prawdziwość twierdzenia, przeprowadza się rozumowanie zgodne z prawami logiki zwane dowodzeniem tego twierdzenia. W dowodzie korzystamy z założeń dowodzonego twierdzenia, aksjomatów lub z wcześniej udowodnionych twierdzeń.

Dowód, w którym rozpoczyna się od założeń, przeprowadza się wnioskowanie i w ten sposób dochodzi do tezy, nazywa się dowodem wprost.

Dowód nie wprost polega na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności z założeniem lub z wcześniej dowiedzionym twierdzeniem lub aksjomatem. Uzyskana sprzeczność oznacza, że rozpatrywane twierdzenie należy uznać za prawdziwe.

To właśnie z tego powodu postanowiłam przygotować zeszyt zawierający kilkadziesiąt zadań maturalnych na dowodzenie. W zadaniach typu *uzasadnij, że…* uczeń ma wskazany cel, który powinien osiągnąć, poszukując odpowiedniego sposobu oraz powołując się na znane własności.

W zbiorze zadań występują także zadania typu *uzasadnij, że...*, chociaż główną część ich dowodu stanowią obliczenia lub budowanie modelu matematycznego. Zdający powinien zastosować strategię, która jasno wynika z treści zadania lub zbudować model matematyczny do pewnej sytuacji i krytycznie ocenić jego trafność.

Ten zeszyt będzie pomocny w rozwiązywaniu zadań typu *uzasadnij, że...*. Będzie on praktycznym narzędziem do pracy nauczyciela i ucznia w trakcie przygotowań do matury z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym.

(**P**) – zadania z poziomu podstawowego;
(**R**) – zadania z poziomu rozszerzonego;
(**P***) – zadania z poziomu podstawowego na maturze 2013 i 2014, od 2015 roku obowiązujące na poziomie rozszerzonym;
(**R***) – zadania z poziomu rozszerzonego obowiązujące od 2015 roku.

Rozwiązania zadań zamieszczonych w niniejszym zeszycie są dostępne na stronie internetowej Wydawcy (www.nowik.com.pl) oraz na stronach Liceum Ogólnokształcącego Nr 2 w Opolu (www.lo2.opole.pl) i Miejskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Opolu (www.modn.opole.pl).

DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH

1. **(P) Wykaż, że liczba $x = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$ jest liczbą naturalną parzystą.**

   D: Liczba x jest liczbą parzystą, jeśli jest wielokrotnością liczby 2, to znaczy można ją zapisać w postaci $x = 2k, k \in N$.

$$x = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} = \frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^2}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)} + \frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)} =$$

$$= \frac{11+2\sqrt{11\cdot 10}+10+11-2\sqrt{11\cdot 10}+10}{11-10} = 22 + 20 = 44 = 2\cdot 22,$$

zatem $x$jest liczbą naturalną parzystą.

2. **(R) Wykaż, że liczba $x = 7^{17} - 1$ jest liczbą parzystą.**

   D: Aby wykazać, że liczba jest parzysta, należy przedstawić tę liczbę w postaci $2n, n \in N$. Skorzystajmy z własności:
   $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$,
   zatem $x = 7^{17} - 1 = (7-1)(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{16}) =$
   $= 6(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{16}) = 2\cdot \underbrace{3\cdot(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{16})}_{n\in N} = 2n,$
   wobec tego liczba x jest liczbą parzystą.

3. **(P) Wykaż, że liczba $x = 7^{n+2} + 7^{n+1} - 2\cdot 7^n$, gdzie $n \in N$, jest liczbą parzystą.**

   D: Aby wykazać, że liczba jest parzysta, należy pokazać, że liczba jest podzielna przez 2. Korzystając z działań na potęgach, liczbę x możemy zapisać w postaci: $x = 7^n(7^2 + 7 - 2) = 7^n \cdot 54 = 2\cdot 27\cdot 7^n$, wobec tego liczba x jest liczbą parzystą.

4. (P) Uzasadnij, że liczba $x = 3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 19.

D: Korzystając z wzorów skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń, zapiszmy liczbę w prostszej postaci:
$x = 3^{18} - 2^{18} = (3^9 - 2^9)(3^9 + 2^9) = [(3^3)^3 - (2^3)^3] \cdot [(3^3)^3 + (2^3)^3]$.

Skorzystajmy z wzorów skróconego mnożenia na różnicę sześcianów i sumę sześcianów dwóch wyrażeń:
$x = (3^3 - 2^3)(3^6 + 6^3 + 2^6) \cdot (3^3 + 2^3)(3^6 - 6^3 + 2^6) =$
$= 19 \cdot 35 \cdot (3^6 + 6^3 + 2^6)(3^6 - 6^3 + 2^6)$,
wobec tego liczba x jest podzielna przez 19 (a także przez 5, 7, 35).

5. (P) Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych zwiększona o 1 jest podzielna przez 12.

Założenie: $\underbrace{2n-1, 2n+1, 2n+3; n \in C}_{\text{zapis kolejnych liczb całkowitych nieparzystych}}$

Teza: $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + 1 = 12k;\ \ n, k \in C$

D: $L = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + 1 = 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 +$
$+ 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 10 = 12n^2 + 12n + 12 = 12\left(\underbrace{n^2 + n + 1}_{k \in C}\right) =$
$= \ 12k = P;\ \ n, k \in C.$

6. (P) Wykaż, że liczba $2015^{2015} + 2 \cdot 2015^{2014} + 2015^{2013}$ jest podzielna przez 2016.

D: $2015^{2015} + 2 \cdot 2015^{2014} + 2015^{2013} =$
$= 2015^{2013}(2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1) =$
$= 2015^{2013} \cdot (2015 + 1)^2 = 2015^{2013} \cdot 2016^2 =$
$= 2015^{2013} \cdot 2016 \cdot 2016$ – liczba podzielna przez 2016.

7. (P) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej *n* liczba $x = 100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4$ jest kwadratem liczby podzielnej przez 3.

D: Liczba jest podzielna przez 3, jeśli suma cyfr tej liczby jest liczbą podzielną przez 3.
$x = 100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = (10^{n+1})^2 + 4 \cdot 10^{n+1} + 2^2 = (10^{n+1} + 2)^2$.
Liczbę $10^{n+1} + 2$ można zapisać: $1\underbrace{0000\ldots}_{n+1\ zer}2$, suma cyfr tej liczby jest równa 3, zatem liczba jest podzielna przez 3.

8. (P) Uzasadnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, po podzieleniu przez 18 daje resztę 5.

D: Liczby niepodzielne przez 3 dają resztę z dzielenia przez trzy 1 lub 2. Jeżeli są one kolejne, to możemy je zapisać w postaci:
$x = 3k + 2, y = 3k + 1, k \in N$, zatem:
$x^2 + y^2 = (3k + 2)^2 + (3k + 1)^2 = 9k^2 + 12k + 4 + 9k^2 + 6k + 1 =$
$= 18k^2 + 18k + 5 = 18\underbrace{(k^2 + k)}_{s \in N} + 5 = 18s + 5,$
wobec tego reszta z dzielenia przez 18 jest równa 5.

9. (P) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej liczba $\boldsymbol{x = n^5 - 5n^3 + 4n - 120}$ jest podzielna przez 30.

D: Liczba 120 jest podzielna przez 30, bo $120 = 30 \cdot 4$. Zatem należy pokazać, że liczba $n^5 - 5n^3 + 4n$ jest podzielna przez 30.
Niech $a = n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$.
Po rozłożeniu na czynniki liniowe liczbę a można przedstawić w postaci:
$a = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.
Liczba a jest iloczynem pięciu **kolejnych** liczb całkowitych. W iloczynie 5 kolejnych liczb całkowitych występują co najmniej dwie liczby parzyste i co najmniej jedna liczba podzielna przez 3. Zatem ta liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6. Wobec tego liczba a jest podzielna przez 5 i przez 6, więc jest podzielna przez 30.

10. (R) Wykaż, że liczba $\boldsymbol{a = \sqrt{37 - 20\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

D: Wyrażenie pod pierwiastkiem jest kwadratem pewnej liczby, którą możemy zapisać w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

$$a = \sqrt{37 - 20\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{25 - 20\sqrt{3} + 12} + \sqrt{12 - 4\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \sqrt{\left(5 - 2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{3} - 1\right)^2} = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 1 = 4 = 2^2.$$

11. (R) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ liczba $\boldsymbol{x = 25^n + 16^n + 2 \cdot 20^n}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

D: $x = 25^n + 16^n + 2 \cdot 20^n = (5^n)^2 + 2 \cdot 5^n \cdot 4^n + (4^n)^2 = (5^n + 4^n)^2$.
Zauważmy, że 5^n jest liczbą naturalną i 4^n też jest liczbą naturalną, a suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną, zatem $(5^n + 4^n)^2$ jest kwadratem liczby naturalnej.

12. (R) Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, dla których $n^2 + 1$ jest podzielne przez 13.

D: Wiemy, że $5^2 + 1 = 26 = 2 \cdot 13$.
Niech liczbą n jest liczba $n = 13k + 5$ i $k \in N$. Wówczas:
$n^2 + 1 = (13k + 5)^2 + 1 = 169k^2 + 130k + 25 + 1 =$
$= 169k^2 + 130k + 26 = 13\underbrace{(13k^2 + 10k + 2)}_{s \in N} = 13s, s \in N$.

Zatem istnieje nieskończenie wiele liczb $n = 13k + 5, k \in N$ takich, że $n^2 + 1$ jest podzielne przez 13.

13. (R) Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $x = 43^{13} - 17^{17}$ przez 10 jest równa 6.

D: Reszta z dzielenia tej liczby przez 10 jest taka sama jak ostatnia cyfra tej liczby.
$43^1 = 4\underline{3}$, $42^2 = 184\underline{9}$, $43^3 = 7950\underline{7}$, $43^4 = 341880\underline{1}$,
$43^5 = 14700844\underline{3}$
Zauważmy, że co czwarta potęga tej liczby ma taką samą cyfrę, jest $43^{13} = 43^{3 \cdot 4} \cdot 43$.
$17^1 = 1\underline{7}$, $17^2 = 28\underline{9}$, $17^3 = 491\underline{3}$, $17^4 = 8352\underline{1}$, $17^5 = 141985\underline{7}$
Co czwarta potęga tej liczby ma taką samą cyfrę, jest $17^{17} = 17^{4 \cdot 4} \cdot 17$.
Ostatnia cyfra potęgi liczby 43 jest taka sama jak ostatnia cyfra potęgi liczby 3, a ostatnia cyfra potęgi liczby 17 jest taka sama jak ostatnia cyfra potęgi liczby 7.
$x = 43^{13} - 17^{17} = 43^{3 \cdot 4} \cdot 43 - 17^{4 \cdot 4} \cdot 17$,
zatem ostatnia cyfra tej liczby jest równa 6.

14. (R) Wykaż, że liczba 36000 ma 72 dzielniki.

D: Liczbę 36000 po rozłożeniu na czynniki pierwsze można przedstawić w postaci $36000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Dzielnikami tej liczby są:
– potęgi liczby 2, tj. 2, 4, 8, 16, 32,
– potęgi liczby 3, tj. 3, 9,
– potęgi liczby 5, tj. 5, 25, 125.
Zatem tych dzielników jest 10, oczywiście dzielnikiem tej liczby jest także liczba 1, zatem jest ich już 11. Zauważmy, że dzielnikami tej liczby będą także liczby z różnych potęg liczb mnożenia przez siebie, a zatem możemy ich utworzyć tyle, ile istnieje kombinacji:
$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_2^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 =$
$= 30 + 10 + 15 + 6 = 61$.
Uwzględniając wszystkie dzielniki tej liczby, możemy zapisać, że jest ich $11 + 61 = 72$. Liczba 36000 ma 72 dzielniki.

$2°$ $a = 2n + 1$ i $b = 2k + 1$ (obie liczby są nieparzyste),
to $101010 = (2n + 1 - 2k + 1)(2n + 1 + 2k + 1) = 4(n - k + 1)$.
Oznacza to, że liczba jest podzielna przez 4, co jest nieprawdą, bo liczba x nie jest podzielna przez 4.

$3°$ $a = 2n$ i $b = 2k + 1$ (jedna liczba jest parzysta, a druga nieparzysta),
to $101010 = (2n - 2k - 1)(2n + 2k + 1) = 2(2n^2 - 2k^2 - k) - 1$.
Oznacza to, że liczba 101010 jest nieparzysta, co jest nieprawdą, bo liczba x jest parzysta.

W każdym z przypadków zachodzi sprzeczność z założeniem. Stąd równość $101010 = (a - b)(a + b)$ jest niemożliwa dla a i b całkowitego.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wykaż, że liczba $x = 3^8 - 1$ jest liczbą parzystą.

2. Wykaż, że liczba $5^9 - 1$ jest podzielna przez 4.

3. Liczby $n, n + 1, n + 2, n + 3$ są kolejnymi liczbami naturalnymi. Wykaż, że różnica iloczynów liczby pierwszej i czwartej oraz drugiej i trzeciej jest równa –2.

4. Wykaż, że liczba 44000 ma 48 dzielników.

5. Uzasadnij, że $\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 1$.

6. Wykaż, że $\frac{55552}{55555} < \frac{77774}{77777}$.

7. Wykaż, że liczba $10^n + 10^{n+1} + 10^{n+2}$ jest liczbą podzielną przez 3.

8. Uzasadnij, że suma cyfr liczby $10^{91} - 91$ jest równa 810.

9. Wykaż, że $3^{500} > 5^{300}$.

10. Wykaż, że liczby $11^{\log_7 10}$ i $10^{\log_7 11}$ są równe.

11. Uzasadnij, że liczba $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{98 \cdot 100} = \frac{49}{50}$.

12. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 16 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest równa 8.