

O MATEMATYCE NIE TYLKO POWAŻNIE

Materiały pomocnicze do nauczania matematyki

Zebrał
Kazimierz Skurzyński



OPOLE
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
2010

Spis treści

Uwagi wstępne	9
Rozdział I. O matematyce – myśli, sentencje, aforyzmy	13
Rozdział II. O nauczaniu matematyki – myśli, rady, zalecenia	39
Rozdział III. O nauczaniu matematyki – mniej poważnie	63
Rozdział IV. Trzy, siedem, dwanaście – w mitach, kulturach, religiach	105
Zamiast uwag końcowych	146

Uwagi wstępne

Czytelnikowi, który zdecydował się na kupno tej książeczki, należy się kilka wyjaśnień. Przede wszystkim pracy tej nie należy traktować jako swoistego streszczenia grubych ksiąg dotyczących Matematyki (tej pisanej z dużej litery) ani tych ksiąg, które w tytule zawierają słowa dydaktyka matematyki lub teoria i praktyka wychowania. Aby poznać te dziedziny wiedzy, należy jednak czytać i studiować grube tomy. W nich znajdują się wprawdzie niektóre uwagi i myśli zawarte w tej pracy, ale są one tam rozwinięte, omówione i zilustrowane wieloma przykładami, a nie jak tu, gdzie niektóre z nich brzmią czasami nawet tak, jak gdyby były wyrwane z kontekstu i z tego powodu mogą być mało zrozumiałe.

Zbiór ten zawiera, moim zdaniem, wiele cennych i trafnych spostrzeżeń o matematyce, o jej nauczaniu, o znaczeniu matematyki i celach jej nauczania; czasem kontrowersyjnych, czasem nawet przeczących sobie, gdyż prawda o tak skomplikowanym przedmiocie, jakim jest matematyka i o bardzo złożonym procesie jej nauczania musi być nieprosta, a także zawiera się w pozornie paradoksalnych sformułowaniach. Jeżeli jednak takie spostrzeżenia, uwagi, aforyzmy, znajdujące się w bardzo różnorodnych pracach, czasami cytowane już przez kogoś, wydawały mi się dostatecznie krótkie i dowcipne, dobrze i błyskotliwie sformułowane, przydatne do mojej działalności zawodowej, to sądziłem, że warto je sobie zanotować. Tak postępowałem przez wiele lat pracy, a później z nauczycielami lub kandydatami na nauczycieli matematyki. Wiele z tych myśli lub powiedzeń wykorzystywałem w czasie lekcji jako swoiste przerywniki monotonii lekcyjnej, w czasie wykładu jako podparcie czymś autorytetem omawianej tezy, jako materiał do dyskusji na ćwiczeniach z dydaktyki matematyki lub materiał

pomocniczy do opracowania np. scenariusza lekcji specjalnej, zajęć pozalekcyjnych, wieczornicy matematycznej itp.

Chciałbym podkreślić, że wybór tych myśli i sentencji dokonany został według mego widzimisię, moich zainteresowań i na moje potrzeby intelektualne lub emocjonalne. Znalazły się tu myśli, spostrzeżenia, uwagi, sentencje i aforyzmy, które z jakiegoś powodu odpowiadały mi, były do czegoś przydatne, a przede wszystkim – po prostu mi się podobały. Z tego wynika, że gdyby zbiorek taki był dziełem kogoś innego, to jego zawartość mogłaby być inna, co zresztą jest zupełnie zrozumiałe.

Jeżeli przytoczone czyjeś wypowiedzi nie oddają dobrze myśli autora lub zgoła są zdeformowane, może to być rezultatem wyrwania danego cytatu z kontekstu lub mojego (nieświadomego) zniekształcenia tej wypowiedzi, co jest moją wyłącznie winą i za co przepraszam.

Zdaję sobie sprawę, że wiele ciekawych i cennych myśli, rad i zaleceń o nauczaniu matematyki nie znalazło się w tym zbiorze (może były zbyt długie, nie dawały się „wyrwać” z kontekstu, a przede wszystkim nie natrafiłem na nie). Ale czy o to chodzi, aby zbiorek taki jak ten był przeglądem wszystkich ciekawych i ważnych stwierdzeń w dziedzinie tak obszernej i tak mało sformalizowanej, jaką jest problematyka nauczania matematyki? (chyba byłoby to po prostu niemożliwe, a na pewno powstałaby kolejna gruba księga. Często nie podaję, skąd dana wypowiedź pochodzi; nie zawsze byłem w stanie podać źródło, początkowo nie przywiązywałem do tego znaczenia, później już nie mogłem odtworzyć pochodzenia danego cytatu. Podobnie z autorami. Nie zawsze wiem, kto jest kto. Dla mojej praktyki nie było to tak bardzo konieczne. Może do opracowań pretendujących do miana naukowych – tak, ale takich zamierzeń jednak nie stawiałem przed sobą.

Dodatkowe wyjaśnienia należą się myślom i spostrzeżeniom „bez autora”. Są to uwagi bądź gdzieś zasłyszane, bądź będące przetworzeniami gdzieś przeczytanych (nie wiadomo gdzie i kiedy) wypowiedzi, a czasami efektem różnych dyskusji lub przeróbek czyichś, mniej lub bardziej skryzalizowanych, myśli. Pamiętam, że po przeczytaniu powiedzenia Owidiusza „Być zakochanym to być szalonym przy zdrowych zmysłach”, powstała myśl: „Zachwycać się matematyką to być szalonym przy zdrowych zmysłach”, natomiast żart „Stary filozof leży na

łożu boleści...” przekształcony został na: „Stary dydaktyk...”. Czyje to więc są powiedzenia? W innych przypadkach nie sposób ustalić autora, nie sposób uznać je również za moje wypowiedzi lub myśli, ale zdecydowałem się zamieścić je mimo braku tej informacji.

Podział zamieszczonych tu wypowiedzi na rozdziały nie jest rozłączny. Niektóre wypowiedzi „pasowałyby” do rozdziału innego niż ten, w którym są zamieszczone, ale przecież nie można rozdzielić matematyki od jej nauczania ani od anegdoty o niej.

Jak ten zbiór wykorzystywać – wydaje mi się, że tak jak już wspominałem:

- do pogłębienia swojej i uczniów wiedzy ogólnej o matematyce, o jej związkach z kulturą, literaturą, religiami czy mitologią,
- do wzbogacania lekcji matematyki o elementy humorystyczne, anegdotyczne, historyczne, a może nawet i filozoficzne,
- do zorganizowania nietypowej lekcji (setnej, okolicznościowej, świątecznej itp.),
- do zorganizowania wieczornicy matematycznej (teatryk matematyczny) itp.
- do ubarwiania naszej nauczycielskiej codzienności – może czasami zbyt mądrej i poważnej.

Zbiorek ten, w wydaniu skryptowym, spotkał się z dużym zainteresowaniem. Wydaje się zatem, że trzeba ponownie wydać tę publikację, gdzie można przeczytać o matematyce i jej nauczaniu bez fachowego słownictwa matematycznego, bez trudnej i specyficznej symboliki matematycznej, zdobyć wiele ważnych i ciekawych wiadomości o samej Matematyce. Mam nadzieję, że, w sposób istotny, przybliżą one Czytelnika do tego, co rozumiemy mówiąc o kulturze matematycznej lub ogólnym wykształceniu matematycznym. Może taka lektura umożliwi następnie mówienie i dyskusowanie o Matematyce i o jej znaczeniu w naszej kulturze i cywilizacji; bowiem dla wielu ludzi, nawet tych z wyższym wykształceniem, matematyka, niestety, kojarzy się przeważnie tylko z rozwiązywaniem mniej lub bardziej złożonych zadań, z „zakuwaniem”, może i ważnych, ale skomplikowanych i trudnych twierdzeń i definicji. A szkoda!

Mam trochę nadziei, że zbiorek ten, przynajmniej o ϵ , zmieni coś na lepsze w tej sprawie.

Na zakończenie chciałbym dodać, że wiele myśli i aforyzmów otrzymałem od znajomych, studentów, również od czytelników. Praca ta wiele zawdzięcza Stanisławowi Fudalemu, który nie szczędził wysiłków, aby zebrany materiał uporządkować i przygotować do pierwszego wydania skryptowego. Wszystkim tym składam tą drogą nie pusty zbiór podziękowań.

Kazimierz Skurzyński

ROZDZIAŁ II

O nauczaniu matematyki – myśli, rady, zalecenia

1. Nauczanie jest sztuką rozbudzania ciekawości w młodych duszach po to, żeby następnie ją zaspokajać, ciekawość jest zaś żywa tylko w umysłach szczęśliwych (*Anatol France*).

2. Człowiek jest twórcą, celem nauczania powinno więc być przede wszystkim budzenie i rozwijanie zdolności twórczych uczniów (*Gustav Choquet*).

3. Z dwóch nauczycieli matematyki, którzy świetnie znają logarytmy, sinusy, pochodne, całki lepszy jest ten, który zna jeszcze Homera, Wergiliusza, Kochanowskiego, Krygowską.

4. Ucząc, sami się uczymy (*Seneka*).

5. W matematyce umiejętności są znacznie ważniejsze od wiadomości, dlatego też w nauczaniu matematyki to, jak uczymy, może być ważniejsze od tego, czego uczymy (*Gyorgy Polya*).

6. Przy analizie zdolności matematycznych należy rozróżnić zdolność do przyswajania nowych pojęć od daru zauważania nowych problemów.

7. Tam, gdzie wszyscy myślą podobnie, nikt nie myśli zbyt wiele (*W. Lipman*).



8. Matematyk naprawdę dobrze zna jakieś pojęcie, gdy zapomni jego definicję, a mimo to umie je stosować (*Roman Sikorski*).

9. Uczyć nowoczesnie, należałoby raczej powiedzieć, uczyć dobrze, to przede wszystkim zainteresować uczniów matematyką, troszczyć się o to, by lekcje nasze nie były ciężkie, nudne, stereotypowe, przeciwnie, by były interesujące, ciekawe, czasem dowcipne, by miały cechy przygody w poszukiwaniu rozwiązań i tworzenia czegoś nowego, by dostarczały satysfakcji każdemu uczniowi, nawet temu, który ma trudności w opanowaniu matematyki (*Bogdan Nowecki*).

10. Nie przypuszczam, żeby jakieś chwytły dydaktyczne mogły radykalnie zwiększyć frakcje rozumiejących matematykę w szkole. Jeżeli zawiodą eksperymenty pedagogów, staniemy przed pytaniem, czy postąpić w myśl żądań żaków krakowskich i skasować matematykę (poza arytmetyką i elementami planimetrii), czy też postępować jak uczy przyroda, która rozrzuca tysiące ziaren, choć tylko kilka z nich padnie na żyzny grunt, to z tych ziaren wyrosną później Pascal, Gauss, Bolyai [...] (*Hugo Dionizy Steinhaus*).

11. Sądzimy, że istnieją dwie podstawowe zasady, które powinny kierować każdym egzaminem z matematyki. Pierwsza polega na tym, że materiały egzaminacyjne i stosowane metody oceny powinny dać kandydatom bardziej możliwość zaprezentowania swojej wiedzy niż odsłonięcia niewiedzy. Według drugiej natomiast, egzamin nie powinien podważać wiary w siebie tych, którzy do niego przystępują (z *raportu Cockrofta*).

12. Uczeń konsumentem, ale również producentem myśli matematycznej.

13. Rozum ludzki jest w stanie znaleźć jasne i proste odpowiedzi na jasne i proste pytania (*Hermann Weyl*).

14. Zdolni matematycy wręcz we wszystkie nauki z przyrodzenia bystrym wnikają rozumem (*Platon*).

15. Istota nowoczesnego nauczania matematyki nie polega na wprowadzeniu większego stopnia ścisłości w rozumowaniach w szkole, polega ona natomiast na położeniu większego nacisku na metody matematyczne wykorzystywane w samej matematyce i w jej zastosowaniach (*Zbigniew Semadeni*).

16. Ojczyzna więcej pożytku odniesie z cnotliwych obywateli, jak obiecywać może po matematykach, astronomach i tam dalej (z *oficjalnego dokumentu Konfederacji Targowickiej*).

17. Za mało stwarza się sytuacji, w których uczeń w sposób spontaniczny mógłby doznać radości z odkrycia i przeżywać fakt odkrycia czegoś nowego. Uczniowie są obojętni wobec zagadnień matematycznych, a człowiek obojętny nie może być twórczy (*Zygfryd Dyrzslag*).

18. Ludzie powolni dzięki kształceniu i ćwiczeniu tę odnoszą korzyść, że stają się pojętniejszymi niż byli poprzednio (*Platon*).

19. Wiedzieć, co się wie i wiedzieć, czego się nie wie – oto prawdziwa wiedza („*Dialogi Konfucjańskie*”^{*}).

20. Stosowną będzie rzeczą przekonać tych, którzy w państwie mają sprawować najwyższe urzędy, ażeby się garnęli do sztuki rachowania (*Platon*).

21. Nie możesz rozwiązać zadania trudnego – bierz się za zadanie niemożliwe (*Aleksander Wielki*).

22. W rzeczywistości nie odbiega daleko od cudu to, że nowoczesne metody nauczania jeszcze nie zdławiły świętej ciekawości dociekań, bowiem ta delikatna roślina poza potrzebą bodźców wymaga wolności, bez której niewątpliwie stanie się wrakiem i ruiną. Jest ciężkim błędem myśleć, że radość poszukiwań i badań można podsycić przymusem i poczuciem obowiązku. Przeciwnie, przypuszczam, że nawet zdrowy drapieźnik straciłby na żarłoczności, gdyby za pomocą bicia

* „Dialogi Konfucjańskie” – tekst starochiński, przypuszczalnie z V–III w. p.n.e., zapisany za pomocą trzynastu znaków, przełożony na trzynastowyrazową sentencję przez O. Wojtasiewicza.

Zero w mianowniku?
To dopiero sęk, kabała.
Od dziś w żadnym zeszytku
Nie zagrozi za to pała!

A pierwiastek z minus jeden?
Czemu nie ma sensu chcieć?
Albo sinus alfa równy siedem?
Wolno funkcji każdą wartość mieć!

Pierwiastkować sumę zakazano.
Zgoda, niech tak będzie
Na podwórku, w nocy, rano
Lecz nie zawsze i nie wszędzie.

Gdy więc uczeń sprawdzian męczy,
Albo stoi przy tablicy,
Niech ten zakaz go nie dręczy
A wnet wszystko pięknie zliczy.

Zero dzieli zero, to jest to!
Równe 2, 3, 4, nawet sto.
Gdzie się kończą kreski dwie =
Wolno pisać, co się chce!

Wtem ktoś woła – głos mu znika.
Widzę defekt tutaj mały,
Z naszych haseł to wynika:
Dwa plus zero – jeden cały.

I powstała konsternacja.
Co tu robić? Gdzie jest racja?
Niech odpowie wasza głowa,
Czy jest dobra matma nowa?

(Kazimierz Skurzyński)

101. Proroctwo dla nastolatek

Której pannie matma obca,
Ta nie będzie miała chłopca.

102. *Cena niezbyt szkolna*

Kto w pogardzie ma wektory,
Ten jest głupi albo chory.

103. A. Eddington ostrzegwał, iż fizyk, który chciałby ujmować swoją żonę wyłącznie w kategoriach fizyko-matematycznych ryzykuje szybką zmianę stanu cywilnego. Jedyne studenci pierwszych lat matematyki, niezrażeni ostrzeżeniami Eddingtona, definiują jeszcze miłość jako limes uczucia przez rozsądek, gdy rozsądek dąży do zera.

104. Tragizm rodu ludzkiego: na ogół człowiek jest mądry jednostronnie, a głupi wielostronnie (*Ludwik Hirszfeld*).

105. Szczęście człowieka nie zależy od tego, czy zna trygonometrię (*Morris Kline*).

106. *Matma jest dobra na wszystko*

Czasem myślisz sobie sam,
Jak poderwać dziewczę mam?
Żaden sposób nie skutkuje!
Ona ciągle matkę kuje.

Powtórz zatem wszystkie wzory,
Logarytmy i wektory,
Twierdzeniami nabij głowę
O równaniach obmyśl mowę.

Nadto humor miej radosny
I poczekaj przyjdzie wiosny.
Wtedy zacznij od pytania:
– Czy znasz sposób na równania?

Zaraz dialog się potoczy,
Zbiór rozwiązań zauroczy,
Nieskończoność się zamarzy!
Matma Szczęściem was obdarzy.



(*Kazimierz Skurzyński*)

107. *Twierdzonka starożytnych*

Tales:

Ta, co o stosunkach ma złe zdanie
– Starą panną pozostanie.

Pitagoras:

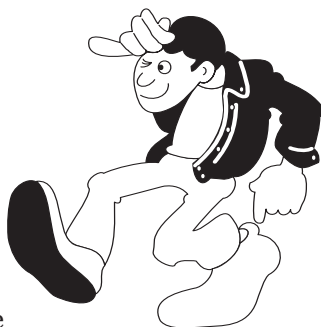
Kto pogardza kwadratami,
Życie spędzi z baranami.

- 108.** Rzeczce raz czart do żebraka:
Niech umowa stanie taka
Gdy przebieżysz most ten cały,
Zdwoję twoje kapitały

Ty zaś tylko mi w nagrodę
Osiem groszy rzucaj w wodę.
Dziad się zerwał, chętnie leci
Jeden raz i drugi, trzeci

Tu dopiero spostrzegł – zdrada!
Ani grosza nie posiada.
Teraz prędko rachuj mały,
Jakie dziad miał kapitały.

(Ze zbioru zadań W. Okulicza)



109. Posyłano mnie do szkoły [...]. Nauczyłem się recytować tabliczkę mnożenia do $5 \times 7 = 35$ i nie sądzę, bym kiedykolwiek mógł nauczyć się więcej, nawet gdybym pozostał w szkole na zawsze (*Mark Twain, „Przygody Hucka”*).

110. Ludzie są jak cyfry, nabierają znaczenia dzięki pozycji (*Napoleon Bonaparte*)

111. Na święta kupiliśmy półtora żywego karpia (*gospodyni domowa*).

112. Ma tak ścisły umysł, że już nawet z matematyki nic nie może zrozumieć.

113. Matematyka uczy, że należy liczyć się z zerami.