I LICZBY I ZBIORY

Wymagania podstawowe

Konieczne (na ocenę dopuszczającą)

Uczeń:

1. wyznaczy część wspólną i sumę dwóch zbiorów skończonych,
2. dokona przybliżenia liczby rzeczywistej z zadaną dokładnością, np. z wykorzystaniem kalkulatora,
3. wykona działania w zbiorach liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych,
4. obliczy wartość potęgi o wykładniku naturalnym lub całkowitym,
5. wykona działania na potęgach o wykładnikach naturalnych i całkowitych oraz na pierwiastkach jednakowego stopnia,
6. odczyta i zaznaczy na osi liczbowej przedziały liczbowe,
7. wyznaczy część wspólną i sumę przedziałów liczbowych,
8. zaznaczy na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności liniowej z jedną niewiadomą,
9. obliczy odległość punktów na osi liczbowej,
10. obliczy punkty procentowe.

Podstawowe (na ocenę dostateczną)

Uczeń spełnia wymagania od 1 do 10 oraz:

11. poda przykład zbioru pustego, skończonego i nieskończonego,
12. wyznaczy część wspólną i sumę dwóch zbiorów,
13. poda przykłady liczb niewymiernych,
14. porówna liczby rzeczywiste,
15. wyznaczy rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej,
16. obliczy wartość potęgi o wykładniku wymiernym,
17. obliczy pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych,
18. poda własności potęg o wykładniku rzeczywistym,
19. usunie niewymierność z mianownika ułamka,
20. poda wartość bezwzględną liczby rzeczywistej,
21. posługuje się procentami i punktami procentowymi w rozwiązywaniu zadań,
22. obliczy procent prosty i składany,
23. na podstawie odpowiednich obliczeń oceni opłacalność lokat i atrakcyjność kredytu.

Wymagania ponadpodstawowe

Rozszerzające (na ocenę dobrą)

Uczeń spełnia wymagania od 1 do 23 oraz:

24. wyznaczy różnicę zbiorów,
25. wykona działania łączne na liczbach rzeczywistych,
26. obliczy błąd względny i bezwzględny przybliżenia,
27. zaznaczy na osi liczbowej punkt o współrzędnej niewymiernej, np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$,
28. wyznaczy różnicę przedziałów liczbowych,
29. zapisze liczbę w notacji naukowej.

Dopełniające (na ocenę bardzo dobrą)

Uczeń spełnia wymagania od 1 do 29 oraz:

30. oceni dokładność zastosowanego przybliżenia,
31. zaznaczy na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu $|x-a|=b$, $|x-a|<b$, $|x-a|>b$,
32. obliczy wartość lokaty o zmieniającym się oprocentowaniu,
33. obliczy koszt kredytu na podstawie informacji o planie spłat.

1. Zbiory i podzbiory

Pojęcie zbioru

- W języku potocznym używa się różnych słów do określenia zbioru: *zespół*, *grupa*, *seria* ...
- W matematyce zbiór to jedno z najczęściej używanych pojęć.
- Choć wszyscy intuicyjnie rozumiemy pojęcie zbioru, nie sposób podać jego matematycznej definicji.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym i nie określamy go.

Ćw.1. W języku potocznym zamiast *zbiór saren* mówi się *stado saren*. Zastąp nazwami używanymi w języku potocznym słowo *zbiór* w sformułowaniach:

a) zbiór bocianów; **b)** zbiór znaczków;
c) zbiór starych monet; **d)** zbiór muzyków;
e) zbiór sukcesów; **f)** zbiór świeżych marchewek.

Ćw.2. Użyj słowa *zbiór* w określeniach z języka potocznego:

a) mnóstwo zabawek; **b)** garść guzików;
c) grupa uczniów; **d)** tłum ludzi;
e) peleton kolarzy; **f)** związek państw wyszehradzkich.

Zbiory oznaczamy dużymi literami A, B, C, X, Y, itp.

Zbiór tworzą **elementy**, które oznaczamy małymi literami.

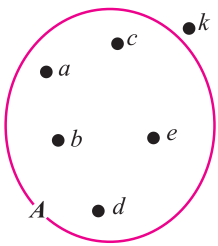
Zapis $a \in A$ ***czytamy:*** a ***należy do zbioru*** A***.***

Zapis ten oznacza, że a ***jest elementem zbioru*** A***.***

Zbiór elementów a, b, c, d, e oznaczamy symbolicznie $\{a, b, c, d, e\}$.
Zbiór taki można przedstawić graficznie — rysunek 1.1

Zapis $k \notin A$ ***czytamy:*** k ***nie należy do zbioru*** A***.***

Zapis ten oznacza, że k ***nie jest elementem zbioru*** A***.***



Rys. 1.1

Ćw.3. Podaj 3 elementy zbioru miesięcy roku. Ile elementów liczy ten zbiór?

Ćw.4. Wymień po trzy elementy:
– które należą do zbioru $\boldsymbol{A}$,
– które nie należą do zbioru $\boldsymbol{A}$, jeżeli:

a) $\boldsymbol{A}$ – zbiór uczniów twojej klasy;

b) $\boldsymbol{A}$ – zbiór lekcji, które masz dzisiaj zgodnie z planem;

c) $\boldsymbol{A}$ – zbiór drzew liściastych.

Ze względu na liczbę elementów wyróżniamy:

- **zbiory nieskończone**, np. *zbiór liczb większych od 1*,
- **zbiory skończone**, np. *zbiór palców u rąk*,
- **zbiór pusty** — zbiór, do którego nie należy żaden element; oznaczamy go symbolem $\varnothing$, np. *zbiór miesięcy, w których liczba dni wynosi 32*.

Ćw.5. Oceń, który ze zbiorów jest skończony, nieskończony, a który pusty:

a) zbiór liczb mniejszych od 5;

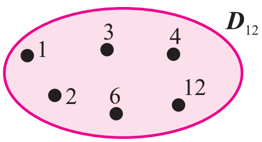
b) zbiór uczniów w twojej klasie [szkole, kraju];

c) zbiór punktów koła;

d) zbiór województw Polski, w których nie ma ani jednego miasta.

Na lekcjach matematyki będziemy zajmować się zbiorami, których elementami są liczby. Zbiory takie nazywa się **zbiorami liczbowymi**.

Możemy na przykład opisać zbiór dzielników liczby 12. Oznaczmy go $\boldsymbol{D_{12}}$.
$\boldsymbol{D_{12}} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. (Rys. 1.2.)



Rys. 1.2

Sposoby opisywania zbiorów

Zbiory opisuje się:

- określając wspólną własność wszystkich elementów zbioru, np.
  $\boldsymbol{K}$ – *zbiór wszystkich liczb parzystych większych od 0 i mniejszych od 10*;
- wymieniając wszystkie elementy zbioru, np. $\boldsymbol{K} = \{2, 4, 6, 8\}$;

- określając warunek $W(x)$, jaki muszą spełnić elementy x, co zapisujemy $\{x: w(x)\}$.
  $\boldsymbol{K} = \{x: x$ jest liczbą parzystą i $0 < x < 10\}$.
  Zapis taki czytamy: ***K*** *jest zbiorem elementów x, takich że x jest liczbą parzystą i x jest większe od 0 i mniejsze od 10.*

Uwaga! Wymieniając elementy zbioru, każdy element (zapisujemy) wymieniamy tylko raz; kolejność, w jakiej wymieniamy elementy, jest dowolna.

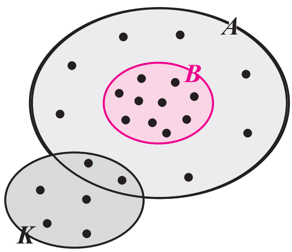
Ćw.6. Opisz innym sposobem zbiory:
A – zbiór dzielników liczby 24,
$\boldsymbol{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,
$\boldsymbol{C} = \{x: x$ jest liczbą jednocyfrową i $0 \le x \le 10\}$.

Podzbiory

Definicja

Zbiór B jest podzbiorem zbioru A, jeśli każdy element zbioru B należy do zbioru A.

Zapis $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ oznacza, że zbiór ***B*** jest podzbiorem zbioru ***A***. Możemy go również przeczytać: *zbiór* ***B*** *zawiera się w zbiorze* ***A***. (Rys. 1.3)
Jeżeli zbiór ***K*** nie jest podzbiorem zbioru ***A***, to zapisujemy to $\boldsymbol{K} \not\subset \boldsymbol{A}$.



Rys. 1.3

Uwaga! Dla każdego zbioru ***A*** zachodzi: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$ oraz $\varnothing \subset \boldsymbol{A}$.

P.1. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{2, 4, 6\}$ oraz określ ilość elementów w tych podzbiorach.

$\varnothing$ – brak elementów

$\{2\}, \{4\}, \{6\}$ – podzbiory jednoelementowe

$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$ – podzbiory dwuelementowe

$\{2, 4, 6\}$ – podzbiór trzyelementowy (zbiór ***A***)

Ćw.7. Wypisz podzbiory zbioru $\{a, b, c, d\}$:

a) czteroelementowe; **b)** dwuelementowe;
c) jednoelementowe; **d)** zeroelementowe.

Zbiory równe

Definicja

Zbiory A i B są równe, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A.

- Równość zbiorów $\boldsymbol{A}$ oraz $\boldsymbol{B}$ oznaczamy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.
- Zauważmy, że $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$.

P.2. Oceń, czy zbiory $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ są równe, jeżeli: $\boldsymbol{A}$ jest zbiorem ocen, jakie można uzyskać na matematyce, i $\boldsymbol{B}$ — zbiorem ocen, jakie można uzyskać na języku polskim.

$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $\boldsymbol{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Wobec tego $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Zadania

1. Oceń, który ze zbiorów jest skończony, a który nieskończony:

a) zbiór liczb mniejszych od 5;
b) zbiór liczb naturalnych mniejszych od 5;
c) zbiór ziaren piasku na kuli ziemskiej;
d) zbiór rozwiązań nierówności $x + 1 > 5$.

2. Wypisz elementy zbioru, którego elementami są dzielniki liczby 50.

3. Wymień pięć elementów zbioru nieskończonego:

a) $\{5, 10, 15, ...\}$; **b)** $\{-2, -4, -6, ...\}$.

4. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, 3\}$.

5. Dany jest zbiór $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru X, które są:

a) jednoelementowe; **b)** pięcioelementowe.

2. Działania na zbiorach

Suma zbiorów

Definicja

Sumą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

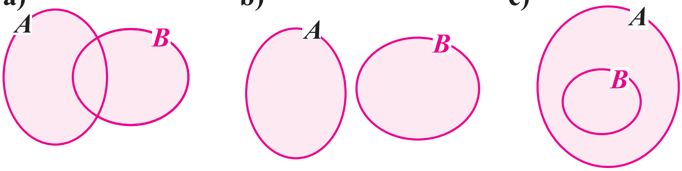
Sumę zbiorów A oraz B oznaczamy $A \cup B$.

$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ lub } x \in B\}$.

Sumę zbiorów zaznaczyć możemy graficznie. (Rys. 1.4)

Znak sumy zbiorów „∪” łatwo zapamiętać bo „suma” piszemy przez „u” zwykłe.

a) b) c)



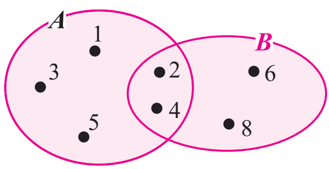
Rys. 1.4

Geometryczna interpretacja działań na zbiorach może być przedstawiona za pomocą diagramów Venna lub kół Eulera, które ułatwiają odkrywanie związków między wynikami działań na zbiorach.

P.1. Wyznacz sumę zbiorów A oraz B, wiedząc, że $A = \{1,2, 3, 4, 5\}$ oraz $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Rozwiązanie

Do sumy zbiorów należą te elementy, które należą przynajmniej do jednego ze zbiorów. Można też wyznaczyć sumę zbiorów, korzystając z ilustracji graficznej — rysunek 1.5.



Rys. 1.5

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Uwaga! $A \cup B = B \cup A$

Ćw.1. Opisz zbiór będący sumą zbiorów A oraz B, jeżeli:

a) A – zbiór dziewcząt w twojej klasie,
B – zbiór chłopców w twojej klasie;

b) $A = \{5, 7, 9, 10, 11, 15\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$;

c) A – zbiór liczb dodatnich jednocyfrowych,
B – zbiór liczb parzystych większych od 0 i mniejszych od 15.

Część wspólna zbiorów

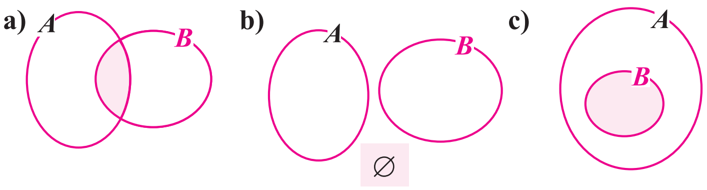
Definicja

Częścią wspólną zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.

Część wspólną zbiorów A oraz B nazywamy też **iloczynem zbiorów** lub ich **przekrojem** i oznaczamy $A \cap B$.

$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$

Iloczyn zbiorów można zaznaczyć graficznie. (Rys. 1.6)



Rys. 1.6

Uwaga! Mówimy, że **zbiory są rozłączne** wtedy i tylko wtedy, gdy ich część wspólna jest zbiorem pustym (rysunek 1.6 b).

P.2. Znajdź część wspólną zbiorów $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Wskazówka: przy wyznaczaniu części wspólnej tych zbiorów skorzystać można z rysunku 1.5.

Wtedy: $A \cap B = \{2, 4\}$.

Uwaga! $A \cap B = B \cap A$

Ćw.2. Opisz zbiór będący częścią wspólną zbiorów A oraz B, jeżeli:

a) A – zbiór dziewcząt w twojej klasie,
B – zbiór chłopców w twojej klasie;

b) $A = \{5, 7, 9, 10, 11, 15\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$;

c) A – zbiór liczb dodatnich jednocyfrowych,
B – zbiór liczb parzystych większych od 0 i mniejszych od 15.

Zbiory A oraz B są rozłączne, gdy $A \cap B = \varnothing$.

Zbiór drzew liściastych i zbiór drzew iglastych są zbiorami rozłącznymi.

Ćw.3. Oceń, które spośród zbiorów są rozłączne:

a) $\{1, 2, 3\}$ i $\{4, 5\}$;

b) $\{a, b\}$ i $\{a\}$;

c) zbiór uczniów klasy Ia i zbiór uczniów klasy Ib;

d) zbiór liczb dodatnich i zbiór liczb ujemnych.

Różnica zbiorów

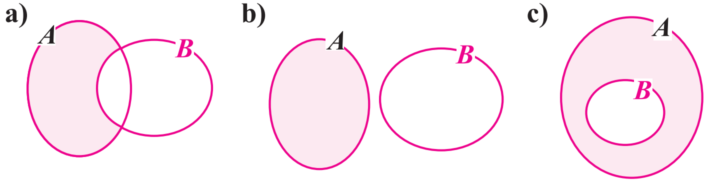
Definicja

Różnicą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

Różnicę zbiorów A oraz B zapisujemy symbolicznie $A \setminus B$.

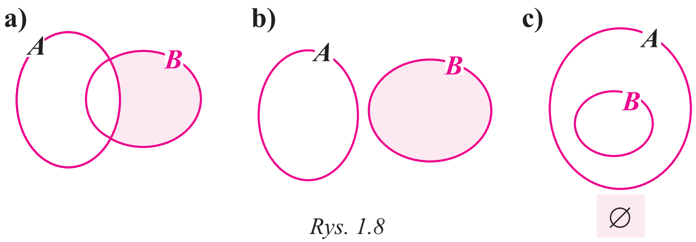
$A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ i } x \notin B\}$

Różnicę zbiorów można zaznaczyć graficznie. (Rys. 1.7)



Rys. 1.7

Zaznaczmy na diagramach Venna różnicę zbiorów $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$. (Rys. 1.8)



Rys. 1.8

Uwaga! Porównując rys. 1.7 i 1.8, zauważamy, że $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$.

P.3. Dane są zbiory $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $\boldsymbol{B} = \{2, 4, 6, 8\}$. Wyznacz $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ oraz $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$.

Wskazówka: przy wyznaczaniu części wspólnej tych zbiorów skorzystać można z rysunku 1.5.

$\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \{1, 3, 5\}$

$\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A} = \{6, 8\}$

Ćw.4. Opisz zbiór będący różnicą zbiorów $\boldsymbol{A}$ oraz $\boldsymbol{B}$ oraz zbiór będący różnicą zbiorów $\boldsymbol{B}$ oraz $\boldsymbol{A}$, jeżeli:

a) $\boldsymbol{A}$ – zbiór dziewcząt w twojej klasie,
$\boldsymbol{B}$ – zbiór chłopców w twojej klasie;

b) $\boldsymbol{A} = \{5, 7, 9, 10, 11, 15\}$, $\boldsymbol{B} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$;

c) $\boldsymbol{A}$ – zbiór liczb dodatnich jednocyfrowych,
$\boldsymbol{B}$ – zbiór liczb parzystych większych od 0 i mniejszych od 15.

Zadania

Przypomnienie!
Oznaczamy
$\boldsymbol{N}$ – zbiór liczb naturalnych
n – liczba naturalna

1. Wyznacz zbiór $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, jeśli:

a) $\boldsymbol{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $\boldsymbol{B} = \{0, 1, 2, 3\}$;

b) $\boldsymbol{A} = \{n \in \boldsymbol{N} : n \geq 2\}$ i $\boldsymbol{B} = \{n \in \boldsymbol{N} : n > 6\}$.

2. Wyznacz zbiór $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, jeśli:

a) $\boldsymbol{A} = \{0, 2, 5, 7, 8\}$ i $\boldsymbol{B} = \{0, 1, 2, 7\}$;

b) $\boldsymbol{A} = \{n \in \boldsymbol{N} : n \geq 2\}$ i $\boldsymbol{B} = \{n \in \boldsymbol{N} : n < 5\}$;

c) $\boldsymbol{A} = \{n \in \boldsymbol{N} : n > 5\}$ i $\boldsymbol{B} = \{n \in \boldsymbol{N} : n \geq 8\}$.

3. Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeśli:

a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ i $B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$;

b) $A = \{n \in N : n \geq 2\}$ i $B = \{n \in N : n > 7\}$;

c) $A = \{n \in N : n$ jest podzielne przez $3\}$ i $B = \{n \in N : n \leq 20\}$.

4. Dane są zbiory: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{10, 12\}$, $C = \{8, 12, 13, 14\}$. Wypisz elementy zbiorów:

a) $A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C$;

b) $A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C$;

c) $A \setminus B,\ A \setminus C,\ B \setminus C$;

d) $A \cup B \setminus C$.

5. Niech X jest zbiorem wszystkich trójkątów, T — zbiorem trójkątów równoramiennych, P — zbiorem trójkątów prostokątnych, R — zbiorem trójkątów równobocznych.

a) Przyjmując, że T' jest zbiorem trójkątów, które **nie są** równoramienne, opisz analogicznie zbiory P' i R'.

b) Wyznacz zbiory:

$P \cap R =$

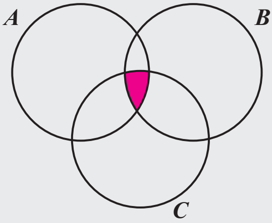
$T \cap P =$

$T \cap R =$

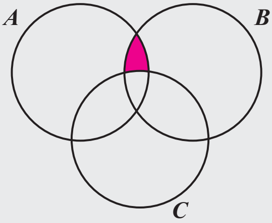
$T' \cap P' \cap R' =$

6. Jakim działaniem można opisać zbiór wyróżniony na diagramie?

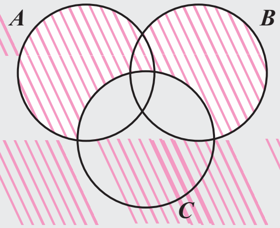
a)



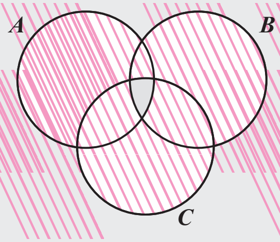
b)



c)



d)



3. Zbiór liczb naturalnych

Własności liczb naturalnych

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

W zbiorze liczb naturalnych jest nieskończenie wiele elementów; najmniejszą liczbą jest 0, liczby największej brak.

Oznaczenie N_+ oznaczać będzie **zbiór liczb naturalnych dodatnich**.

$N_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Zbiór liczb naturalnych ma własności:

Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma liczbę najmniejszą.

Każda liczba naturalna n ***ma liczbę następną*** $n+1$.

Ćw.1. Nie wykonując obliczeń określ, czy wynik działania jest liczbą naturalną:

a) $12+738$; **b)** $738-12$; **c)** $17-932$;

d) $83 \cdot 24$; **e)** $46:2$; **f)** $149:5$;

g) $a+b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi;

h) $a-b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi;

i) $a \cdot b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi;

j) $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi.

W zbiorze liczb naturalnych jest wykonalne dodawanie i mnożenie.

Odejmowanie i dzielenie nie są wykonalne w zbiorze liczb naturalnych, bo np. $(2-5) \notin N$ i $(6:4) \notin N$.

Z równości $112 = 7 \cdot 16$ wnioskujemy, że 7 i 16 są dzielnikami 112; mówimy, że liczba 112 dzieli się przez 7 i 16.

Jeżeli dla liczb naturalnych a, b i d zachodzi równość $a = b \cdot d$, to liczby b i d nazywamy **dzielnikami** a, natomiast a — **wielokrotnością** liczby b oraz d.

P.1. Znajdź zbiór dzielników liczby 60.

Rozwiązanie

Dzielnikami liczby 60 są: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Ćw.2. Sprawdź, czy liczba b jest dzielnikiem a, jeśli:

a) $a = 156,\ b = 12$; **b)** $a = 400,\ b = 15$; **c)** $a = 2232,\ b = 31$.

Ćw.3. Jaki zbiór dzielników ma liczba przedstawiona iloczynem:

a) $5 \cdot 11$; **b)** $2 \cdot 7 \cdot 13$; **c)** $21 \cdot 17$; **d)** $6 \cdot 55$?

Cechy podzielności

Dzielnik	Cecha podzielności	Przykłady liczb
2	Ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8	12, 126, 258
3	Suma cyfr dzieli się przez 3	126, 258, 570
4	Liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry dzieli się przez 4	116, 540, 736
5	Ostatnią cyfrą jest 0 lub 5	70, 95, 235, 775
6	Liczba jest podzielna przez 2 i przez 3	126, 258, 330
9	Suma cyfr dzieli się przez 9	126, 369, 891

Liczba pierwsza* — *każda liczba naturalna większa od 1, która dzieli się tylko przez jeden i przez siebie.

Archimedes wykazał, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Są to liczby: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ...

Liczba 2 jest jedyną liczbą parzystą wśród liczb pierwszych, pozostałe liczby pierwsze są nieparzyste.

➧ ***Liczba złożona* — każda liczba naturalna większa od jeden, która nie jest liczbą pierwszą.**

Liczba złożona to liczba naturalna, która ma więcej niż dwa dzielniki. Każda liczba złożona jest iloczynem liczb pierwszych,
np.: $6 = 2 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze to znaczy przedstawić ją w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Uwaga! Liczby naturalne 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

P.2. Liczbę 60 rozłóż na czynniki pierwsze.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Odp. Zatem $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Ćw.4. Rozłóż na czynniki pierwsze liczby:

a) 248; **b)** 630.

Największy wspólny dzielnik

Największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb naturalnych różnych od zera nazywamy największą liczbę naturalną, która jest dzielnikiem każdej z liczb.

Oznaczenie: NWD(a, b) – największy wspólny dzielnik liczb a oraz b.

Uwaga! Aby znaleźć NWD dwóch liczb, wystarczy rozłożyć na czynniki pierwsze dane liczby, następnie wybrać wspólne czynniki w obu rozkładach i pomnożyć je przez siebie.

P.3. Znajdź największy wspólny dzielnik liczb 90 i 84.

Rozwiązanie

Rozkładamy liczby 90 i 84 na czynniki pierwsze i kolorem zaznaczamy te czynniki, które są wspólne dla obu liczb.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Zatem $\text{NWD}(90,\ 84) = 2 \cdot 3 = 6$.

Ćw.5. Znajdź największy wspólny dzielnik liczb:

a) 630 i 231; **b)** 126 i 300.

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dwóch niezerowych liczb naturalnych nazywamy najmniejszą różną od zera liczbę naturalną, podzielną przez każdą z tych liczb.

Oznaczenie:

$\text{NWW}(a, b)$ – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a oraz b.

Uwaga! Aby znaleźć NWW dwóch liczb, wystarczy rozłożyć na czynniki pierwsze dane liczby i następnie wypisać wszystkie czynniki jednej z nich oraz dopisać te czynniki drugiej, które jeszcze nie zostały wypisane i pomnożyć je przez siebie.

P.4. Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 90 i 84.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

2 i 7 nie występują wśród czynników liczby 90.

Zatem $\text{NWW}(90,\ 84) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 1260$.

Ćw.6. Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność liczb:

a) 76 i 252; **b)** 630 i 231.

Dzielenie z resztą

Jeżeli a jest dowolną liczbą naturalną, b — liczbą naturalną różną od 0, to liczbę a można zapisać

$$a = b \cdot q + r$$

gdzie q i r są liczbami naturalnymi, przy czym $r < b$.

Ćw.7. Oblicz resztę z dzielenia:

a) 529 : 9; **b)** 2573 :15; **c)** 13 : 36; **d)** 1600 : 120.

Ćw.8. Jeśli $n \in N$, to liczba postaci $6n+2$ podzielona przez 6 daje resztę 2. Zapisz w tej postaci liczbę, która podzielona przez 5 daje resztę:

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 4.

Zadania

1. Ze zbioru liczb $\{17, 61, 93, 108, 201, 432, 399, 911\}$ wypisz:
- **a)** liczby podzielne przez 3;
- **b)** liczby podzielne przez 9.

2. Wykonaj pisemnie działania:
- **a)** 462 : 2;
- **b)** $175 \cdot 86$.

3. Znajdź NWD i NWW liczb 112 i 210.

4. Zapisz symbolicznie liczbę naturtalną, która jest:
- **a)** liczbą parzystą;
- **b)** liczbą nieparzystą;
- **c)** liczbą, która podzielona przez 7 daje resztę 5.

5. Ile razy czynnik 2 występuje w iloczynie $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20$ rozłożonym na czynniki pierwsze?

4. Zbiór liczb całkowitych

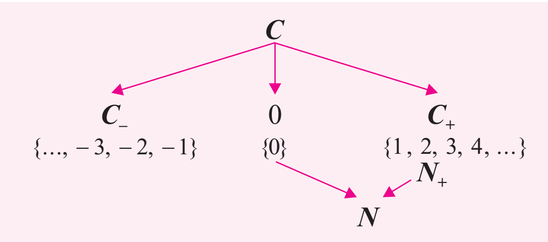
Własności liczb całkowitych

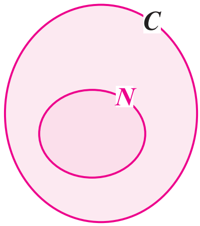
$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

W zbiorze liczb całkowitych jest nieskończenie wiele elementów, jednak brak liczby najmniejszej i liczby największej.

C_+ – zbiór liczb całkowitych dodatnich,

C_- – zbiór liczb całkowitych ujemnych.





Rys. 1.9

Działania na liczbach całkowitych

W zbiorze liczb całkowitych jest wykonalne: dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą.

Uwaga! W odejmowaniu liczb całkowitych stosujemy następującą własność: $a - b = a + (-b)$.

Ćw.1. Wykonaj działania:

a) $(-36) + 24 + (-15)$;

b) $(-13) + 35 - 46$;

c) $28 + (-54) - 72$;

d) $(-8) - 15 - (-56)$;

e) $[-9 + (-16)] \cdot (-4)$;

f) $[26 + (-44)] \cdot (-8)$.

Zadania

1. Wykonaj działania:

a) $(-29)+17$; **b)** $28-(-13)$; **c)** $(-42)\cdot(-5)$; **d)** $26\cdot(-1)$.

2. Oblicz:

a) $(-24)-(-35)$; **b)** $(-8)\cdot 12-6\cdot(-15)$;

c) $[(-7)-3]\cdot(-24)$; **d)** $-5\cdot(-3)+(7-12)$

3. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $3(a-c)-(-b+2c)$ dla $a=15$, $b=-15$ i $c=-7$;

b) a^2-3b^3 dla $a=-3$, $b=-2$;

c) $-2\cdot(3a-1)-(2-5a)$ dla $a=-271$;

d) $\dfrac{7a-3(2a+2)}{-(-3a+4)-(-2)\cdot(a-1)-4a}$ dla $a=1789$.

4. Sprawdź, czy kwadrat magiczny **a)** jest poprawnie zbudowany ze względu na dodawanie, a kwadrat **b)** — ze względu na mnożenie.

a)

28	–56	4
–32	–8	16
–20	40	–44

b)

32	64	–2
1	–16	256
–128	4	8

5. W miejsce □ wpisz odpowiedni znak „+” lub „–”, tak aby otrzymać równość prawdziwą:

a) $-2\cdot(-10)=\square 20$; **b)** $-2-10=\square 12$;

c) $-2-(-10)\square 12=\square 4$; **d)** $-4[1-3\square 7-(-5)]=16$.

6. Oblicz:

a) $[-12+(-8)]\cdot[-2\cdot(-24)+5\cdot(-12)]$;

b) $[-7\cdot 6+6\cdot(-5)]\cdot[12\cdot(-8)+(-17)\cdot 6-(-15)\cdot(-4)]$;

c) $[-18\cdot 9-16\cdot(-8)]\cdot[12\cdot(-6)-8\cdot(-4)]$.