

Jerzy Nowik

Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej

OPOLE 2009

Spis treści

Wstęp	5
0. Dlaczego dzieci uczą się matematyki	7
1. Początki myślenia matematycznego u dziecka	10
2. Rozwijanie aktywności matematycznej dziecka	20
3. Cele kształcenia matematycznego w edukacji elementarnej. Kompetencje matematyczne. Treści matematyczne w <i>Podstawie programowej kształcenia zintegrowanego</i>	30
4. Planowanie procesu nauczania-uczenia się matematyki w klasach początkowych (scenariusz – konspekt)	43
5. Kształtowanie wybranych zagadnień matematycznych	51
5.1. Orientacja w przestrzeni	52
5.2. Kształtowanie pojęcia zbioru	58
5.3. Liczby naturalne	65
5.4. Działania na liczbach naturalnych	77
5.5. Rozwiązywanie równań i nierówności	96
5.6. Zadania tekstowe i sposoby ich rozwiązywania	105
5.7. Kształtowanie pojęć i umiejętności geometrycznych	133
5.8. Umiejętności praktyczne w kształceniu matematycznym	148
6. Praca domowa z matematyki ucznia klas początkowych	160
7. Sprawdzanie i ocenianie osiągnięć szkolnych. Ocena opisowa osiągnięć matematycznych	166
8. Przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki, czyli dlaczego dzieci nie lubią matematyki	182
9. Repetytorium z podstaw matematyki	194
9.1. Pojęcie zbioru. Klasyfikacja zbiorów. Działania na zbiorach	195
9.2. Pojęcie relacji i odwzorowania zbiorów	204
9.3. Podstawy arytmetyki	214
9.4. Podstawowe pojęcia geometryczn	231
10. Środki dydaktyczne do elementarnej edukacji matematycznej	242
11. Zagadnienia do samokontroli	253
Bibliografia	255
Załączniki	
Z.1. Konspekt do zajęć w klasie I: <i>Monografia liczby 6</i>	258
Z.2. Konspekt do zajęć w klasie I: <i>Monografia liczby 7</i>	263
Z.3. Konspekt do zajęć w klasie II: <i>Porównywanie różnicowe i ilorazowe</i>	268
Z.4. Podstawa programowa wychowania przedszkolnego	271
Z.5. Podstawa programowa kształcenia ogólnego w klasach I-III (fragmenty)	275

Wstęp

Książka przeznaczona jest dla studentów kierunku kształcenie wczesnoszkolne (edukacja elementarna) i wychowanie przedszkolne do przedmiotu *Edukacja matematyczna z metodyką* oraz studentów innych kierunków, którzy wybrali edukację wczesnoszkolną jako drugą specjalizację. Może być również użyteczna dla nauczycieli przedszkoli i nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w formie zintegrowanej lub przedmiotowej, nazywanej czasem edukacją elementarną lub też nauczaniem początkowym.

Jest to w dużej mierze zbiór wykładów, jakie prowadziłem dla studentów kształcenia zintegrowanego na Uniwersytecie Opolskim i w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Raciborzu, i zawiera podstawy metodyki nauczania początkowego matematyki oraz elementy podstaw matematyki. Przygotowując wykłady, korzystałem z bogatej literatury i doświadczeń tak znakomitych autorów, jak Zofia Krygowska, Zbigniew Semadeni, Henryk Moroz, Helena Siwek, Jadwiga Hanisz, Dorota Klus-Stańska, Gustaw Treliński i wielu innych oraz z uwag i wskazówek doświadczonych nauczycieli.

Książka nie wyczerpuje zagadnienia i nie powinna być traktowana jako wystarczający poradnik metodyczny dający pełną wiedzę dla przyszłego nauczyciela. Konieczne jest uzupełnianie i poszerzanie swoich umiejętności, korzystanie z literatury książkowej, artykułów w czasopismach i opracowań coraz częściej zamieszczanych w Internecie. Czasem obok standardowego wykładu mogą się znaleźć fragmenty mające charakter pewnych uwag, refleksji. Można je pominąć bez szkody dla wiedzy, ale zachęcam do przeczytania ich, bowiem wypływają z doświadczenia i przemyśleń wynikających z pracy z dziećmi oraz dyskusji z metodykami, nauczycielami, studentami i uczniami.

W dalszej części (Rozdział 9.) jest zamieszczone repetytorium z podstaw matematyki niezbędnych studentowi i nauczycielowi. Nie są to jednak treści przeznaczone do realizacji w klasach początkowych, mają być przydatne nauczycielowi, który musi wiedzieć znacznie więcej niż uczeń. Nauczyciel powinien umieć spojrzeć na matematykę w klasach początkowych oczami matematyka i zawsze odpowiedzieć sobie na pytania: *Czego chcę nauczyć? Po co tego uczyć? Czy przekazywane wiadomości i umiejętności będą dla ucznia zrozumiałe i będą mu potrzebne? Czy treści te mają charakter wspomagający – służą tylko przygotowaniu ucznia do poznawania innych ważnych treści, a może mają charakter propedeutyczny i dopiero w dalszej edukacji będą poznawane dokładniej? Jak pracować z dzieckiem, by przygotować je do dalszej nauki?*

W roku 2009 wprowadzona została reforma systemu oświaty, polegająca m.in. na stopniowym objęciu obowiązkiem szkolnym dzieci od 6 roku życia i zmianie treści nauczania. 23 grudnia 2008 roku Ministerstwo Edukacji Narodowej zatwierdziło zmianę *Podstawy programowej kształcenia w profilach kształcenia ogólnozawodowego*, z mocą obowiązującą od 1 września 2009. *Podstawa* jest dokumentem wyznaczającym kierunki edukacji szkolnej. W stosunku do *Podstawy* obowiązującej jeszcze w roku szkolnym 2007/08, pewne treści zostały przesunięte do realizacji w przedszkolu, np. ćwiczenia związane z orientacją w przestrzeni i wzajemnym położeniem przedmiotów, inne do klas starszych szkoły podstawowej, jak np. działania pisemne, rozwiązywanie zadań tekstowych złożonych.

Wszystkie te treści są jednak uwzględnione w niniejszym opracowaniu, bowiem nie przekraczają one możliwości ucznia kształcenia wczesnoszkolnego i mogą być realizowane w ramach tzw. rozszerzenia lub na przykład kółku matematycznym.

Obowiązująca *Podstawa programowa* z zakresu edukacji matematycznej w przedszkolu oraz w etapie I nauczania jest zamieszczona w załącznikach 4 i 5.

Opracowanie nie zaspokoi w pełni potrzeb nowoczesnego nauczyciela, ale, mam nadzieję, dostarczy niezbędnej pomocy do poprawnej pracy dydaktycznej i pokaże sposoby doskonalenia swoich umiejętności przez korzystanie z różnych źródeł informacji. Zachęcam do korzystania z licznych opracowań metodycznych poszczególnych tematów, które można znaleźć m.in. w drukowanych opracowaniach metodycznych oraz w Internecie, a których spora lista jest zamieszczona w wykazie literatury. Zachęcam do poszukiwania również własnych rozwiązań, zwłaszcza dotyczących tzw. aktywizacji matematycznej ucznia poprzez stosowanie odpowiednich metod oraz zabaw i gier matematycznych, rozwiązywanie łamigłówek logicznych i matematycznych, pamiętając o doborze stosownym do wieku ucznia, posiadanej przez niego wiedzy, zaawansowania w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Zawarte w książce wskazówki metodyczne mogą pomóc w realizacji wybranych treści matematycznych w klasach I–III oraz w przedszkolu, podobnie jak załączone przykładowe konspekty – scenariusze. Niektóre problemy zostały tylko zasygnalizowane i wymagają samodzielnego szerszego poznania z bogatej literatury.

Aby swobodnie i dobrze uczyć dzieci, niezbędna jest wiedza pedagogiczna i psychologiczna poznawana podczas studiów i systematycznie doskonalona.

Podziękowania!

Dziękuję serdecznie Pani Prof. Dr hab. Gabrieli Kapicy za inspirację do przygotowania książki i stałą zachętę do pracy nad nią i jej doskonaleniem.

Paniom Renacie Reclik, Krystynie Wojciechowskiej i Aleksandrze Urban dziękuję za cierpliwość i przeczytanie „całości w kawałkach”. Cenne uwagi oraz rady, którymi zechciały Panie podzielić się ze mną, wpłynęły na ostateczną postać tego opracowania.

Mojej żonie Krystynie dziękuję za wsparcie duchowe, cierpliwe wysłuchiwanie moich wątpliwości i cenne porady i podpowiedzi oraz wielokrotne czytanie połączone z walką o właściwe miejsca dla przecinków i nie tylko.

Szczególne podziękowania składam Pani Prof. Dr hab. Jadwidze Hanisz za wskazówki do pierwszej wersji książki, które pozwoliły nadać tej pracy obecny kształt.

Jerzy Nowik

0. Dlaczego dzieci uczą się matematyki

Po co ja się tego uczę?

Do czego będzie mi potrzebna matematyka?

Karol kl. IV

Co to jest matematyka?

Co jest takiego ważnego w matematyce, że wszyscy na całym świecie, uczyliśmy się matematyki, choć nie zawsze nam się ona podoba i nie zawsze odnosimy sukcesy? Czym jest matematyka? Czym zajmuje się matematyka szkolna?

Patrząc na szkolne programy nauczania matematyki, dostrzegamy dużo informacji o liczbach i zależnościach między nimi opisywanych za pomocą działań i funkcji. Jest to arytmetyka, algebra i elementy tzw. analizy matematycznej. Jest tam również nauka o kształtach, czyli figurach geometrycznych i zależnościach między nimi, inaczej mówiąc elementy geometrii oraz trygonometrii. To podstawowe działy matematyki występujące w matematyce szkolnej. Są tu, jak widać, pewne informacje i związki między nimi tworzące specyficzne struktury. Znajomość informacji pozwala nam porozumiewać się tym specyficznym językiem. Ale aby móc swobodnie poruszać się w świecie matematyki, konieczne jest rozumienie struktury wiedzy matematycznej oraz dostrzeganie innych zależności, nie zawsze opisanych w podręcznikach szkolnych. To wszystko pozwoli nam znaleźć odpowiedzi np. na takie pytania:

1. *Ile muszę mieć pieniędzy, aby kupić zeszyt za 3 zł i ołówek za 2 zł?*
2. *Mam 20 zł. Chcę kupić książkę i linijkę. Czy wystarczy mi pieniędzy?*
3. *Wybieram się na wakacje samochodem ze Szczecina w Bieszczady. Ile muszę kupić benzyny?*
4. *Jestem właścicielem piekarni. Ile muszę upiec chleba, a ile bułek na poniedziałek?*
5. *Jestem murarzem. Ile cegieł potrzebuję na wymurowanie ściany?*
6. *Jestem stolarzem. Chcę zrobić regał na książki. Jaka powinna być odległość między półkami, by zmieściły się na nim podręczniki i albumy? Ile potrzebuję desek, aby zrobić ten regał?*
7. *Jestem projektantem wnętrz i chcę zaprojektować posadzkę z kolorowych płytek o powtarzającym się wzorze. Jak to zrobić?*
8. *Przygotowujemy boisko do gry w piłkę nożną. Jak wytyczyć granice boiska? Gdzie postawić bramki? W którym miejscu rozpoczynać się będzie gra?*

Oczywiście, mogę nie zwracać uwagi na te pytania i nad niczym się nie zastanawiać. Pójdę do sklepu i jeśli zabraknie mi pieniędzy, to najwyżej nie kupię zeszytu lub ołówka. Ale jeśli murarz nie zakupi odpowiedniej ilości cegieł, to koszt budowy będzie wyższy, np. o dodatkowy transport, a jadąc w Bieszczady może mi zabraknąć benzyny 30 km przed osiągnięciem celu.

Poszukując odpowiedzi na stawiane pytania, wykorzystujemy:

- a) informacje, jakimi dysponujemy, jakie są dane w opisie sytuacji, a jakie dane należy jeszcze pozyskać,

- b) wiedzę o liczbach, figurach geometrycznych, mierzeniu oraz umiejętność łączenia różnych elementów wiedzy stosownie do potrzeb,
- c) umiejętności rachunkowe.

Analizując pytanie nr 2., wiem, jaką kwotę dysponuję. Muszę jeszcze wiedzieć, ile kosztuje książka, a ile linijka i ile kosztują obie te rzeczy razem – wykonać dodawanie. Następnie porównać otrzymaną sumę z liczbą 20 i odpowiedzieć na pytanie.

W zadaniu 3. muszę przeprowadzić kalkulację zużycia paliwa. Najpierw obliczyć z mapy lub odczytać z tabeli odległość ze Szczecina do Ustrzyk. Muszę wiedzieć, ile kilometrów przejadę moim samochodem na jednym litrze benzyny. Teraz wystarczy tylko obliczyć zapotrzebowanie na benzynę.

Jeżeli jestem murarzem i będę budować ścianę, to muszę wiedzieć, jaki będzie kształt ściany, np. ściana jest prostopadłościanem, jaka ma być jej długość, szerokość i wysokość. Muszę znać wymiary cegły, która też jest prostopadłościanem i wiedzieć, jak ona będzie ułożona w murze. Teraz należy obliczyć, ile cegieł mieści się w długości muru, jego szerokości i wysokości. Na koniec – obliczyć, ile cegieł potrzeba na wymurowanie ściany. A co musiałbym zrobić, będąc projektantem domu?

W każdym przypadku korzystamy z informacji zawartych w opisie sytuacji, czyli zadaniu, bądź dostępnych w innych źródłach, np. mierzenie cegły. Niezbędna jest wiedza matematyczna, która pozwoli uświadomić, zobrazować problem oraz powiązać posiadane informacje w strukturę matematyczną, choć często tu tkwi największa trudność. Teraz pozostaje tylko wykonać właściwe obliczenia, sprawdzenie i można przystąpić do realizacji zadania ujętego w postaci problemu.

I to jest właśnie m.in. matematyka.

Nie odpowiemy w pełni na pytanie *co to jest matematyka?* Zainteresowanym polecam m.in. wspaniałą książkę Couranta i Robbinsa o takim właśnie tytule: *Co to jest matematyka*¹, do czytania której w zasadzie wystarczy wiedza matematyczna na poziomie szkoły średniej.

Dlaczego dzieci uczą się matematyki?

Według anegdoty, znakomity matematyk niemiecki Karol Gauss w młodości przeskądzał na lekcji matematyki i nauczyciel, chcąc zająć czymś niesfornego ucznia, polecił mu obliczyć sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do 40 z nadzieją, że zajmie to niesfornemu młodzieńcowi sporo czasu. Gdy większość uczniów rozwiązywałaby zadanie, dodając do siebie kolejne liczby, młody Gauss zauważył, że suma pierwszej liczby i ostatniej jest taka sama jak drugiej i przedostatniej, jak trzeciej i trzeciej od końca itd. Wystarczyło teraz ustalić, ile jest takich par, a było ich 20, i tę liczbę pomnożyć przez 41, czyli zaobserwowaną wcześniej sumę liczby pierwszej i ostatniej. I oto gotowy wynik, liczba 820. Pamiętamy ten problem z liceum, jako obliczanie sumy skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisywanego wzorem: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Nie wiemy, niestety, jak potoczyła się dalej lekcja. Przytaczam tę anegdotę, by powiedzieć, że większość zadań można rozwiązać metodami elementarnymi, ale czasem bardzo żmudnymi, czasochłonnymi, a można też szybko rozwiązać problem, ale do tego potrzebna jest pewna wiedza. Sytuacje analogiczne można zaobserwować na każdym poziomie rozwoju. Zobaczmy to na prostym zadaniu.

1 R. Courant i H. Robbins: *Co to jest matematyka?* Wydawnictwo PRÓSZYŃSKI, Warszawa 1998

§ 18. 1. *Uczeń klasy I–III szkoły podstawowej otrzymuje promocję do klasy programowo wyższej, z zastrzeżeniem ust. 8.*

8. *W wyjątkowych przypadkach rada pedagogiczna może postanowić o powtarzaniu klasy przez ucznia klasy I–III szkoły podstawowej, na podstawie opinii wydanej przez lekarza lub publiczną poradnię psychologiczno-pedagogiczną, w tym publiczną poradnię specjalistyczną, oraz w porozumieniu z rodzicami (prawnymi opiekunami) ucznia.*

W komentarzach do nowej *Podstawy programowej* (zatwierdzonej w grudniu 2008 r.) zaleca się, aby w klasie III obok oceny opisowej stosować ocenę osiągnięć wyrażaną stopniem szkolnym w obowiązującej skali, aby przyzwyczajać dziecko do stopni, z jakimi spotka się w klasie IV.

Przedstawione fragmenty rozporządzenia dotyczą oceniania i klasyfikowania na poziomie edukacji elementarnej. Jak widać, nie ma stopni szkolnych, mówi się jedynie o tzw. ocenie opisowej osiągnięć szkolnych i taką oceną zajmiemy się w tym rozdziale. Zanim jednak przejdziemy do opisywania osiągnięć, powinniśmy uświadomić sobie, że ocenianie wiąże się z odpowiedzią na trzy pytania:

- Co sprawdzamy?
- Jak sprawdzamy?
- Jak oceniamy?

1. Co sprawdzamy?

Analizując podstawę programową edukacji zintegrowanej, napotykamy na ogólnie sformułowane hasła określające ogólny zakres poznawanych treści matematycznych. Jakie umiejętności matematyczne powinien uczeń opanować określa czasem program nauczania, z którego korzysta nauczyciel. Trzy dokumenty: *Podstawa programowa*, przyjęty *program nauczania* oraz cytowane na wstępie *Rozporządzenie MEN w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów* są podstawą do opracowania **wewnątrzszkolnego systemu oceniania – WSO**. System taki opracowuje każda szkoła stosownie dla swoich potrzeb z uwzględnieniem wymagań przyjętych programów nauczania, warunków, w jakich pracuje, Określa się w nim m.in. cele sprawdzania i oceniania, zadania szkoły i nauczycieli, sposoby współpracy z rodzicami w zakresie informowania ich o osiągnięciach dzieci i wspólnie podejmowanych działaniach zarówno w odniesieniu do uczniów wyróżniających się jak i uczniów mających braki w umiejętnościach. Ponadto system jest podstawą do konstruowania tzw. **przedmiotowych systemów oceniania – PSO**. Nauczyciele kształcenia zintegrowanego są również zobligowani do opracowania takiego systemu.

Najpierw kilka uwag ogólnodydaktycznych. Zazwyczaj mówi się łącznie o sprawdzaniu i ocenianiu, gdyż te dwa procesy są bardzo ściśle ze sobą powiązane, choć często zastępuje się jednym terminem – pomiar dydaktyczny, a ostatnio mówi się o ewaluacji osiągnięć szkolnych.

Osiągnięcia szkolne ucznia to opanowane przez niego wyniki nauczania wyrażające się zdolnością, gotowością uczniów do wykonywania określonego rodzaju czynności. Osiągnięciem będzie zatem zdolność do wykonania wskazanych działań, rozwiązania określonego zadania tekstowego, rozpoznawania i nazywania kształtów geometrycznych, czy odzwierciedlanie z pamięci np. opisu sposobu mierzenia odcinka linią.

Sprawdzanie to upewnianie się, czy uczeń opanował poznawane wiadomości i umiejętności. Aby dokonać sprawdzenia, musi istnieć dostępny dla sprawdzającego wzorzec sprawdzanej czynności – wiadomości lub umiejętności. Nie wystarczy wykorzystać bez-

pośrednio opracowanych wcześniej celów operacyjnych edukacji matematycznej, ale należy umieć zbudować wzorce, czyli zadania, które powinien umieć rozwiązać uczeń. Rozwiązanie zadania przez ucznia pozwoli nauczycielowi stwierdzić, że sprawdzana umiejętność jest opanowana. Czasem jednak ta sama umiejętność może być sprawdzana na różnych poziomach trudności. Mówimy nieraz o umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych z jednym działaniem. Ale przecież wiemy, że mogą to być zadania o różnym stopniu trudności. Czasem mówimy, że są to proste zadania „dla każdego ucznia”, innym razem są to zadania trudne, z którymi „przeciętny uczeń” sobie nie poradzi. Tym samym kwalifikujemy umiejętności na różne poziomy wymagań, co w nauczaniu w klasach starszych wiąże się z wystawieniem oceny, stopnia szkolnego z obowiązującej skali stopni. W edukacji początkowej nie posługujemy się wprawdzie stopniami, ale zarówno nauczyciel, jak i uczeń i jego rodzice chcą wiedzieć, czy dziecko opanowało umiejętność rozwiązywania tylko prostych zadań tekstowych, czy trudniejszych – bardziej złożonych, a to wiąże się ze stopniowaniem umiejętności, czyli ocenianiem.

Ocenianie to umieszczanie osiągnięć szkolnych na ustalonej skali. Zatem w edukacji elementarnej, stosując ocenę opisową, nie uda się uniknąć oceniania. Pomocne w tym są standardy wymagań, które opisują umiejętności wymagane na poszczególne poziomy. Niestety dla edukacji elementarnej takich standardów dotąd nie opracowano. Nie będziemy tu wchodzić szerzej w problematykę pomiaru dydaktycznego. Zainteresowanym polecam książkę Bolesława Niemierki: *Między oceną szkolną a dydaktyką. Bliżej dydaktyki*¹.

W rozdziale o konstruowaniu celów nauczania matematyki mówiliśmy o tym, jak treści matematyczne przedstawiać w postaci operacyjnej – czynnościowej. Mówiąc o sprawdzaniu poznawanych czynności, możemy wykorzystać sporządzone wcześniej listy wiadomości i umiejętności, jako podstawę do budowania oceny opisowej.

Oto przykładowe zestawienie umiejętności, jakie powinien opanować uczeń w klasie I. Warto zwrócić uwagę na wyróżnione kursywą stopniowanie umiejętności, co w gruncie rzeczy jest formą oceny osiągnięć ucznia.

- tośunki przestrzenne (prawa, lewa strona) określa: *poprawnie, czasami popełnia błędy, nie potrafi określić.*
- Położenie przedmiotów w przestrzeni (na, nad, pod, obok, wewnątrz, na zewnątrz) określa: *poprawnie, czasami z błędami, nie potrafi określić.*
- Cyfry oznaczające liczby w zakresie 10: *zapisuje poprawnie, czasami popełnia błędy, często popełnia błędy.*
- Porównuje i porządkuje liczby w zakresie 10: *poprawnie, czasami popełnia błędy, nie potrafi porównywać i uporządkować.*
- Dodaje i odejmuje w zakresie 10: *w pamięci, czasami na konkretach (palcach, liczydło, kredkach), liczy tylko na konkretach, nie liczy.*
- Znaki $<$, $>$, $=$ stosuje: *poprawnie, popełnia błędy, nie stosuje.*
- Figury geometryczne nazywa i rozróżnia: *poprawnie, popełnia błędy, nie zna.*
- Dni tygodnia: *zna, myli, nie zna.*
- Zbiory i podzbiory wyodrębnia: *poprawnie, popełnia błędy, nie potrafi.*
- Proste zadania tekstowe rozwiązuje: *samodzielnie, czasami z pomocą nauczyciela, zawsze z pomocą nauczyciela.*
- Treść zadania do ilustracji lub działania układa: *samodzielnie, z pomocą nauczyciela, nie potrafi ułożyć.*

1 B. Niemierko: *Między oceną szkolną a dydaktyką. Bliżej dydaktyki*. WSiP, Warszawa 1998

W podobny sposób należy, zgodnie z przyjętym programem nauczania, opracować listy umiejętności na kolejne semestry i na koniec nauki w klasie III. Taka lista umiejętności powinna być systematycznie aktualizowana, aby obserwować i rejestrować zmiany w wiedzy ucznia. Jednocześnie powinna ona być przekazywana systematycznie rodzicom dziecka z informacją o postępach – zmianach. Ocena opisowa dla uczniów i rodziców może przyjąć np. formę listu skierowanego do dziecka i jego rodziców, z odpowiednim komentarzem, co dziecko i rodzice powinni zrobić, aby usunąć braki i podnieść poziom umiejętności. Uszanujemy w ten sposób podmiotowość ucznia, a jednocześnie uwzględnione zostaną postępy edukacyjne, zmiany ucznia w rozwoju i szczególne osobiste sukcesy-dokonania – osiągnięcia. Tym samym, spełnione będą trzy istotne **funkcje oceny opisowej**: *informacyjna, korekcyjna, motywacyjna*.

Na koniec tych rozważań jeszcze dwa ważne pojęcia wiążące się ze sprawdzaniem wywodzące się z pomiaru dydaktycznego. Sprawdzając umiejętności ucznia, porównujemy je z osiągnięciami innych uczniów, uśrednionymi osiągnięciami klasy, a nawet kilku klas w szkole. Mówimy wtedy o **różnicowaniu osiągnięć ucznia**. Natomiast gdy układem odniesienia jest wzorzec umiejętności ustalony na podstawie analizy programu nauczania i przyjętych standardów, to mamy do czynienia ze **sprawdzaniem osiągnięć szkolnych**. Nas interesować będzie w większym stopniu sprawdzanie niż różnicowanie.

Wspomnieliśmy o pojęciu **ewaluacji systemu dydaktycznego**, przez co rozumiemy zbieranie informacji o warunkach przebiegu i wynikach wdrażania tego systemu w celu jego ulepszenia lub podjęcia decyzji o dalszym stosowaniu². Chodzi tu o system dydaktyczny – planowe zabiegi dydaktyczne, jakimi posługuje się nauczyciel, który wykorzystuje wyniki ewaluacji do zmiany swego postępowania dydaktycznego, a nie tylko do oceniania osiągnięć uczniów. Aby ten zamiar mógł mieć szanse powodzenia, należy dbać o to, by sprawdzanie osiągnięć szkolnych było przede wszystkim systematyczne i wielostronne, tylko takie bowiem przyniesie informacje niezbędne do modernizacji swego postępowania. W zależności od rodzaju oceniania dziecka używać należy różnych narzędzi, które pomagają w rejestrowaniu zaobserwowanych postępów dziecka w odniesieniu do umiejętności oraz wysiłku, z jakim je zdobywa.

2. Jak sprawdzamy?

W części pierwszej ustaliliśmy, co chcemy sprawdzać. Możemy przejść teraz do określenia sposobów sprawdzania osiągnięć uczniów.

W edukacji początkowej ważne jest **bieżące sprawdzanie i ocenianie** podczas zajęć, gdy uczeń natychmiast otrzymuje potwierdzenie tego, co poprawnie wykonał, co osiągnął, w czym jest dobry oraz co poprawić, co udoskonalić, nad czym popracować. Potwierdzenie to otrzymuje w formie ustnej w trakcie wykonywania zadania bądź tuż po jego wykonaniu w formie pisemnej notatki wpisywanej do zeszytu.

Zachęcam do założenia **teczki ucznia** – czasami używa się terminu *portfolio*. W teczce gromadzone są wytwory pracy ucznia, m.in. karty obserwacji dziecka, karty pracy, swobodne teksty pisane przez ucznia, prace plastyczne, prace konkursowe, sprawdziany przedmiotowe. Tam również są notatki nauczyciela o postępach dydaktycznych i wychowawczych, dostrzeżonych zachowaniach wymagających interwencji pedagoga lub psychologa, kontaktach z rodzicami itp. Wszystkie te informacje będą przydatne przy planowaniu indywidualnego kształcenia, formułowaniu opinii o uczniu i przy ustalaniu oceny okresowej, na półrocze i koniec kolejnych lat edukacji mającej charakter bardziej ogólny i pełniej

2 Niemierko B.: *Pomiar wyników kształcenia*. WSiP, Warszawa 1999

8. Przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki, czyli dlaczego dzieci nie lubią matematyki

*Pokonywanie trudności jest wpisane
w proces uczenia się matematyki.
Problem jednak w tym,
że dostrzeżenie trudności zawartej w zadaniu
wywołuje zawsze wzrost napięcia i emocji ujemnych.*

E. Gruszczyk-Kolczyńska

Spotykamy się często ze stwierdzeniem: moje dziecko nie lubi matematyki! Zastanawiamy się wtedy, dlaczego? Skąd bierze się pogląd, że matematyka jest trudna, że nie jest możliwa do opanowania przez większość uczniów? Często i dorośli wspominają swoją matematykę szkolną jako coś niemożliwego do opanowania, do ogarnięcia przez przeciętny umysł, a przede wszystkim niemożliwego do zrozumienia. A zatem moje dziecko nie może nauczyć się matematyki i stąd jego niepowodzenie w uczeniu się tego przedmiotu. Objawem takiego stanu jest lęk przed matematyką, a nawet przed szkołą, dziecko nie chce iść do szkoły, bo dziś będzie ta straszna matematyka.

Czy tak jest naprawdę? Czy rzeczywiście matematyka jest tylko dla wybranych? Przecież o matematyce powiedziano tyle pięknych słów, układano wiersze, tworzone są dzieła plastyczne itd. Może przyczyna niechęci do matematyki nie tkwi wcale w przedmiocie, tylko zupełnie w czymś innym. Spróbujmy przyjrzeć się temu problemowi, uwzględniając główne źródła niepowodzeń, a mianowicie: **szkołę** ze swoją strukturą organizacyjną, wyposażeniem i nauczycielem, **środowisko rodzinne i społeczne** – dom, rodzice, otoczenie, koledzy oraz **ucznia** z jego psychiką, wrażliwością i zdolnościami.

Przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki

Ustalmy najpierw, co rozumieć będziemy pod pojęciem niepowodzenia szkolnego. Przyjmijmy za W. Okoń, że przez **niepowodzenia szkolne** rozumieć będziemy *wyraźne rozbieżności między celami edukacji a osiągnięciami szkolnymi uczniów oraz kształtowaniem się negatywnego stosunku młodzieży wobec wymagań szkoły*¹. Takie ujęcie dotyczy wszelkich niepowodzeń szkolnych. My zajmować się będziemy niepowodzeniami w uczeniu się matematyki w ramach kształcenia zintegrowanego. Powiemy, że uczeń ma niepowodzenia w uczeniu się matematyki, gdy nie opanowuje wiadomości i umiejętności matematycznych przewidzianych na poziomie edukacji elementarnej.

Bardzo dużo do poznania przyczyn trudności w uczeniu się matematyki na etapie edukacji elementarnej wniosła prof. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, która od lat osiemdziesiątych XX wieku zajmuje się m.in. problemem dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki i specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki². Warto zapoznać się z bogatym pisarskim dorobkiem Autorki.

Szkoła to organizacja nauczania ze swymi zaletami – organizacją procesu dydaktyczno-wychowawczego, wyposażeniem w środki dydaktyczne i nauczycielami. Ale to,

1 W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny*, PWN, Warszawa 1996

2 E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki*, IWZZ, Warszawa 1989. Zob. też Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E.: *Dziecięcia matematyka*, WSiP, Warszawa 1997

co w jednej szkole jest uważane za zaletę, w innej może być wadą negatywnie wpływająca również na powodzenia matematyczne uczniów.

Nie sprzyja dobremu uczeniu się szkoła, w której nie zwraca się uwagi na:

- przepełnione klasy; w klasie jest 25, a czasem nawet 30 uczniów;
- brak podstawowych środków dydaktycznych – ograniczanie się do kredy i tablicy;
- godziny rozpoczynania zajęć szkolnych – są szkoły, gdzie lekcje w klasach I–III rozpoczynają się około godziny 11, a nawet 12;
- brak miejsca w szkole na rekreację w czasie przerw;
- nauczycieli, którzy nie są zadowoleni ze swojej pracy, nie znajdują satysfakcji w tym, co robią, a w dodatku są źle wynagradzani i szukają innych sposobów „dorobienia” do pensji, zamiast przeznaczyć czas wolny na wypoczynek i doskonalenie zawodowe.

Takich czynników można wymienić jeszcze wiele. Pozostaje mieć nadzieję, że wszystkie wymienione wady i usterki związane z organizacją pracy szkoły, będą szybko eliminowane z systemu organizacyjnego. Zatrzymajmy się jednak na moment przy nauczycielu, gdyż jest to „czynnik” najistotniejszy w tym ogniwie. W jaki sposób nauczyciel wpływa na powodzenie, a tym samym i niepowodzenia matematyczne uczniów?

Po pierwsze – fachowość, rzetelna wiedza merytoryczna. Nigdy nie nauczy dobrze matematyki ktoś, kto sam jej nie zna, nie rozumie. Nauczyciel, również na poziomie edukacji elementarnej, musi widzieć matematykę znacznie szerzej niż poznaje ją uczeń, musi znać cel dalszy uczenia podstaw matematyki. Nie przekona dzieci do matematyki ktoś, kto sam nie ma przekonania, że matematyka nie jest taka trudna, że można się jej nauczyć, że jest potrzebna do zastosowań praktycznych oraz ma znaczący wpływ na rozwój myślenia ogólnego.

Po drugie – dobra znajomość psychologii dziecka. Niezbędna jest ogromna wiedza o dziecku, o tym jakie są jego możliwości percepcyjne na każdym etapie rozwoju szkolnego, jak przebiegają procesy myślowe dziecka – na czym polega myślenie konkretne i czym różnią się np. procesy asymilacji i akomodacji oraz jakie jest znaczenie tych procesów w nauczaniu matematyki.

Po trzecie – dydaktyka, zarówno teoria jak i praktyka. Umiejętność projektowania procesu dydaktycznego, w tym określanie celów i dobieranie odpowiednich metod, form i środków dydaktycznych. W połączeniu z wiedzą psychologiczną można uczyć matematyki, a jednocześnie doskonalić swoje umiejętności. Aby to osiągnąć, nauczyciel musi być refleksyjny. Tak jak rozwiązywanie zadań metodą Polya kończyło się refleksją nad rozwiązaniem, tak każda lekcja powinna kończyć się „rzutem oka wstecz” – była o tym mowa podczas planowania procesu dydaktycznego, jako o ewaluacji zajęć. Przemyśleć lekcję jeszcze raz, ocenić przede wszystkim swoje postępowanie, zastanowić się, czy osiągnięte zostały założone cele – czy uczniowie opanowali przewidziane wiadomości i umiejętności. Jeśli nie, to co należy jeszcze zrobić w najbliższym czasie, co w dalszym etapie, a jakich błędów należy unikać w przyszłości. Warto stawiać sobie pytania oceniające lekcję i swoje postępowanie, np:

- Czy uważam lekcję za udaną?
- Co było najciekawsze dla uczniów na lekcji?
- Co było dla uczniów najtrudniejsze?
- Czego się sam nauczyłem?
- Co mnie szczególnie zaniepokoiło?
- Jaką ocenę wystawię sobie za przeprowadzoną lekcję?

10. Środki dydaktyczne do elementarnej edukacji matematycznej

*Słyszałem i zapomniałem.
Widziałem i zapomniałem.
Zrobiłem i zrozumiałem.*

Konfucjusz

Poznawanie pojęć matematycznych i nabywanie odpowiednich umiejętności przez dzieci w młodszym wieku szkolnym wymaga operowania konkretnymi, by potem przejść do czynności wyobrażonych. Dlatego posługujemy się różnorodnymi środkami dydaktycznymi. Ich klasyfikacja, funkcje dydaktyczne i podstawy metodyki stosowania są opisane w literaturze dydaktycznej. Większość znajdujących się na rynku środków dydaktycznych została zatwierdzona do użytku szkolnego. Pełny wykaz takich środków jest na stronie internetowej Ministerstwa Edukacji Narodowej.¹ Wydawcy niektórych podręczników oferują do swych podręczników zestawy środków dydaktycznych, które wyposażone są w instrukcje wykorzystania. Jest też wiele środków nie wpisanych wprawdzie do wykazu MEN, ale bardzo przydatnych w kształtowaniu pojęć i umiejętności matematycznych.² Przedstawiamy wybrane środki, głównie o charakterze manipulacyjnym, a sposób wykorzystania niektórych został opisany w części matematyczno-metodycznej. Kupując środki dydaktyczne, starajmy się zachować instrukcje do nich, gdyż poza opisem konstrukcyjnym, zazwyczaj podaje się w nich krótką charakterystykę walorów dydaktycznych i wskazówki metodyczne na temat ich wykorzystania podczas lekcji.

Stosując środki dydaktyczne warto zastanowić się zawsze przed ich zastosowaniem znajdując odpowiedzi na pytania: *Jaki jest cel pracy? Co można wywnioskować z obserwacji pracy dzieci? Gdzie tu jest matematyka? Czy wszyscy uczniowie wykonali zadanie? Jeśli nie, to co mogło być przyczyną? Czy można w tym przypadku mówić o niepowodzeniach?* Itd.

Multiklocki – klocki typu „Multilink”

Klocki typu multilink to plastikowe klocki sześciennie, które można łączyć ze sobą z każdej strony. W ten sposób dzieci tworzą konstrukcje zgodnie z poleceniami nauczyciela, np. położyć przed sobą jeden klocek, dołączyć następny z prawej strony, przed prawym klockiem położyć kolejny, a potem na lewy klocek położyć nowy klocek itd. Dziecko tworzy własną konstrukcję z 5 klocków, a następnie opisuje ją, a inne dzieci układają zgodnie z opisem. Jest to doskonale ćwiczenie sprawdzające i rozwijające orientację w przestrzeni. Można też konstrukcję z kilku elementów uło-

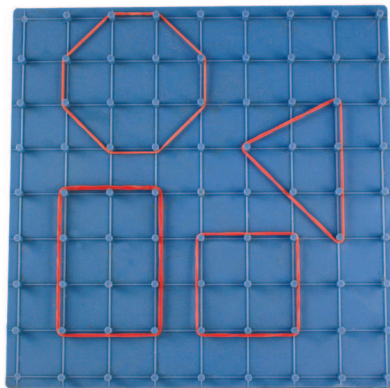
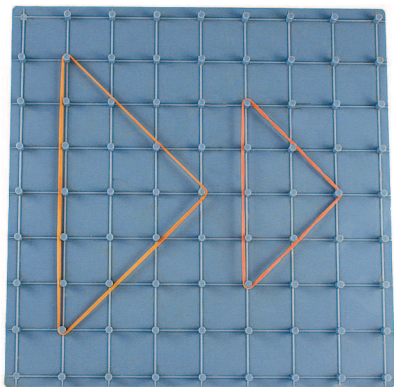


1 <http://www.srodki-dydaktyczne.men.gov.pl>

2 Duży wybór środków dydaktycznych, z opisem, można znaleźć w Internecie, m.in. na stronie: <http://www.rozegrane.tropy.pl>

Geoplan

Podstawą konstrukcji geoplanu jest tzw. sieć kwadratowa, czyli sieć punktów, w których przecinają się linie równoległe i prostopadłe równo od siebie oddalone. Geoplan jest tabliczką, na której w punktach sieci są wystające kołeczki z główką lub gwoździki. Uzupełnieniem są kolorowe gumki, np. recepturki, które dziecko rozpinają na kołeczkach, budując różne figury geometryczne i badając zależności między figurami lub ich elementami konstrukcyjnymi.



Podobną funkcję pełni papier z punktami sieci (kropkowany), na którym dziecko może rysować figury geometryczne lub rozwiązywać zadania.

Tangramy

Tangram – jest starą grą znaną podobno od ok. 3000 lat. Klasyczny tangram to kwadrat, który jest podzielony na 7 części (tanów):

- 2 duże trójkąty,
- 1 średni trójkąt,
- 2 małe trójkąty,
- 1 mały kwadrat,
- 1 mały równoległobok.



Celem tej gry jest ułożenie większego obrazka wg przygotowanego wzorca (najczęściej narysowanych konturów tego obrazka) lub własnej wyobraźni. Przy zabawie z tangramem należy pamiętać o tym, że:

- należy wykorzystać wszystkie części,
- elementy muszą leżeć obok siebie, ale nie mogą na siebie nachodzić,
- tany można obracać na drugą stronę.



Puzzle – Happy Cube

Puzzle Happy to rewelacyjne zabawki edukacyjne kształtujące zdolności manualne i wyobraźnię przestrzenną. Z sześcioczęściowych puzzli budujemy najpierw sześcian, a następnie próbujemy zmieścić poszczególne elementy z powrotem w ramce. Oprócz układania kostki, dzieci uczą się sztuki stawiania pytań, np. Czy zadanie zawsze można rozwiązać? Czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie? Jak zbadać, czy zadanie ma więcej rozwiązań niż jedno? Itd. Układanki występują w różnych wersjach o zróżnicowanej trudności i kolorystyce.



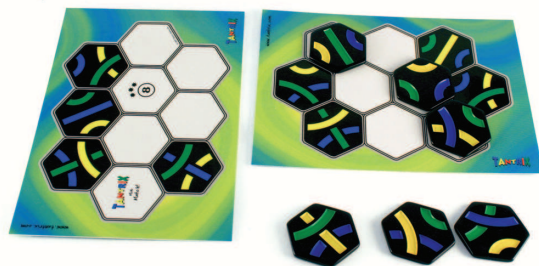
Tantrix

W 1994 poddano Tantrix szczegółowej analizie i programom testowym z udziałem dzieci w wieku szkolnym we Francji. Na podstawie tych badań uznano Tantrix za uniwersalne i ciekawe narzędzie, pomocne w rozwijaniu u dzieci umiejętności logicznego myślenia, spostrzegawczości i wzrokowego odróżniania elementów

Gra składa się z sześciokątnych, bakelitowych płytek, które należy układać tak, by utworzyć wzór zgodnie z kolorowymi liniami na płytkach. Wersja podstawowa (Odkrywanka), łatwiejsza, zawiera dziesięć kolorowych ponumerowanych płytek, wystarczających na 10 samodzielnych układanek o różnych stopniach trudności. Prawie każdy może rozwiązać najłatwiejsze zadanie z trzema płytkami. W miarę zwiększania liczby płytek gra staje się coraz trudniejsza, ale i ciekawsza, dlatego każdy może znaleźć odpowiedni dla siebie poziom.



Trudno jest zapamiętać skomplikowane rozwiązania, co więcej, w wielu wypadkach jest kilka rozwiązań, można więc wykorzystywać jeden zestaw wiele razy. Prawdziwym wyzwaniem jest dodanie kolejnego zestawu Odkrywanki i ułożenie układanki z 20, a nawet więcej płytek. Są też inne warianty gry, m.in. łączący w sobie elementy sudoku, np. zestaw Tantrix Mini Match wymagający uzupełnienia płytkami plansz zawierających fragment ułożonego wzoru.



Co roku odbywają się mistrzostwa gry w tantrixa, gdzie duże sukcesy odnoszą polscy uczestnicy. (Zob. www.tantrix.com).

Z.1. Konspekt zajęć w klasie I: *Monografia liczby 6*

Temat zajęć: *Monografia liczby 6. Nauka pisania cyfry 6*

Cele operacyjne zajęć

Uczeń:

- tworzy zbiory sześćelementowe i przelicza zbiory w zakresie 6.
- używa liczebników porządkowych do określenia kolejności przedmiotów.
- posługuje się jednostką miarową przy mierzeniu długości i szerokości wybranych przedmiotów, stosując dwie metody mierzenia: przez odkładanie i układanie kilku jednostek miarowych na mierzonej długości lub szerokości.
- rozkłada liczbę 6 na składniki w aspekcie kardynalnym oraz algebraicznym, posługując się znakiem: „+”.
- porównuje liczby w zakresie 6, stosując znaki: „<” , „>” , „=”
- rozwiązuje i układa na podstawie rysunku treść zadań tekstowych .

Metody:

- **słowne:** rozmowa kierowana, objaśnienie, praca z książką,
- **oglądowe:** pokaz, obserwacja,
- **aktywizujące oparte na działaniu uczniów:** pomiar, ćwiczenia przedmiotowe, elementy metody problemowej.

Formy: praca jednolita i zróżnicowana, zbiorowa i indywidualna.

Środki dydaktyczne: szablony jabłek i gruszek, kartoniki z cyframi, naturalne okazy: jabłka, gruszki, śliwki, kasztany, ziemniaki, buraki (w liczbie po 6), patyczki, 6 talerzy, klocki Cuisineira, plansza z zestawu do monografii liczb, rysunek poglądowy do ilustracji zadania tekstowego.

Przebieg zajęć

1. Powstanie liczby 6

Nauczyciel przypina na tablicy szablony pięciu jabłek.

- Policzcie, ile jabłek zostało przypiętych na tablicy? Przypnijcie obok kartonik z odpowiednią cyfrą.
- Przypnijcie jeszcze jeden szablon jabłka. Ile jabłek jest teraz? Przypnijcie kartonik z odpowiednią cyfrą.

2. Aspekt kardynalny liczby 6

Nauczyciel prezentuje uczniom wystawkę „Dary jesieni”. W koszykach, miseczkach i na talerzach poukładane są owoce i warzywa: 6 jabłek, 6 gruszek, 6 śliwek, 6 kasztanów, 6 ziemniaków, 6 buraków.

- Ile zbiorów można wyróżnić w naszej wystawce?
- Ile elementów liczy zbiór jabłek, gruszek, śliwek, kasztanów, ziemniaków, buraków?
- Co wspólnego mają ze sobą te zbiory?

- Ułóżcie na ławce przed sobą tyle patyczków ile liczy zbiór kasztanów. Ile patyczków położyliście na ławce?
- Pokażcie tyle palców, ile jest wszystkich zbiorów na wystawce „Dary jesieni”.

3. Aspekt porządkowy liczby 6

Nauczyciel rozkłada na stole sześć talerzy w jednym rzędzie, jeden obok drugiego.

- Policzcie, ile jest talerzy? Zaczniście od talerza najbliższego okna. Teraz zaczniście od strony przeciwnej.
- Połóżcie na pierwszym talerzu z lewej strony jabłko a na szóstym z lewej strony gruszkę.
- Połóżcie na pierwszym talerzu z prawej strony jabłko a na szóstym z prawej strony gruszkę.
- Jakie owoce są na pierwszym talerzu?
- Jakie owoce są na szóstym talerzu?
- Dlaczego tak zostały umieszczone te owoce?
- Od czego zależy to, że raz ten talerz jest pierwszy a raz szósty?

4. Aspekt miarowy liczby 6

Nauczyciel rozdaje uczniom klocki z zestawu Cuisenaire`a.

- Wyjmijcie z pudełka klocek, który oznaczamy liczbą 1.
- Ułóżcie przed sobą sześć takich klocków, ściśle, jeden tuż przy drugim w jednym, równym rzędzie.
- Sprawdźcie, który z pozostałych klocków ma taką samą długość jak te sześć klocków razem.
- Jaki kolor ma ten klocek?
- Jaką liczbą możemy go określić?
- Zmierzcie klockiem, który oznaczamy liczbą sześć długość waszej ławki, poprzez odkładanie tego klocka. Ile razy odkładaliście ten klocek „sześć”?
- Ułóżcie tyle klocków „sześć”, ile mieści się ich, jeden tuż obok drugiego, na szerokość waszej ławki. Ile klocków „sześć” mieści się na szerokości waszej ławki?

5. Nauka pisania cyfry 6

Nauczyciel prezentuje uczniom planszę z zestawu dotyczącego monografii liczb.

- Ile elementów znajduje się w przedstawionym zbiorze?
- Jaką cyfrą opisany jest ten zbiór?
- Jak wygląda cyfra 6?
- Gdzie znajduje się „brzuszek” cyfry 6?
- Narysujcie w zeszytach zbiór złożony z sześciu jednakowych elementów. Jaką cyfrą go podpiszemy?

Następnie nauczyciel demonstruje sposób pisania cyfry 6 w dużym i małym formacie (kolorową kredą można zaznaczyć strzałkami kierunek pisania cyfry) oraz w „kratkach” zeszytu. Każdemu z uczniów pisze wzór w zeszycie.

Następnie uczniowie piszą samodzielnie cyfrę 6 w kartach pracy, ćwiczeniach, zeszytach.

6. Rozkład liczby 6 na składniki

Nauczyciel przypina na tablicy 6 szablonów gruszek, oraz rysuje kredą dwie „pętelki”.