Stanisław Zieleń

Konkurs matematyczny dla uczniów gimnazjum

Zadania z Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla uczniów gimnazjów województwa opolskiego z lat 2001–2011

OPOLE
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
2012

Wstęp

Książka zawiera zestawy zadań z konkursów matematycznych przeprowadzanych w gimnazjach na terenie województwa opolskiego w latach 2001–2011. Prezentowane zestawy obejmują treści zadań przeznaczonych na eliminacje gminne i zawody wojewódzkie. Zadania w zestawach są różnorodne i zróżnicowane pod względem stopnia trudności.

Wszystkie zadania mają kompletne rozwiązania, co umożliwia samodzielne ich rozwiązywanie w trakcie przygotowań do następnych konkursów i służy pogłębianiu wiedzy matematycznej. Zbiór świetnie nadaje się do pracy z uczniami na zajęciach kół matematycznych w gimnazjum.

Zestawy zadań z zawodów gminnych mają na ogół niższy stopień trudności od zestawów zadań z zawodów wojewódzkich i niejednokrotnie spełniają rolę przygotowawczą do startu na zawodach wojewódzkich.

Publikacja jest odpowiedzią na zapotrzebowanie nauczycieli i uczniów szkół gimnazjalnych. Mamy nadzieję, że dołączy ona do kanonu lektur niezbędnych przy przygotowywaniu się do konkursów i olimpiad matematycznych – i potwierdzi prawdziwość znanego powiedzenia, że „Opolskie matematyką stoi".

Autor

Zestaw 1

Zadanie 1.

a) Sprawdź, czy prawdziwe są równości:

$$\sqrt{2\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

b) Wstaw w miejsce a, b i c takie liczby, aby równość $\sqrt{a+\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$ była prawdziwa i nie była identyczna z żadną równością z podpunktu **a)**.

Zadanie 2. Dany jest ułamek $\frac{a}{b}$. Do licznika tego ułamka dodano liczbę 1. Jaką liczbę należy dodać do mianownika tego ułamka, żeby otrzymać ułamek równy danemu?

Zadanie 3. Handlowiec podniósł cenę pewnego towaru o 2 zł, a w kolejnej podwyżce — o 2,10 zł; twierdził, że za każdym razem podnosił cenę o ten sam procent. Jaką cenę miał ten towar po obydwu podwyżkach?

Zadanie 4. Olek hoduje rybki w akwarium o wymiarach 40 cm, 64 cm i 35 cm (wysokość), natomiast Kamil — w akwarium o wymiarach 50 cm, 80 cm i 40 cm (wysokość). Gdy Olek wrzucił kamień do swego akwarium, poziom wody podniósł się o 2 mm. Na jaką wysokość podniósłby się poziom wody w akwarium Kamila po wrzuceniu tego samego kamienia?

Zadanie 5. Bok trójkąta równobocznego ma długość 1 dm. Zbadaj, jaką długość może mieć promień okręgu, który ma sześć punktów wspólnych z bokami tego trójkąta.

(Zawody gminne 2001 r.)

Zestaw 2

Zadanie 1. Dane jest równanie $ax + 2 = x + 8$.

a) Dla jakiej liczby podstawionej w miejsce a rozwiązaniem równania jest $-0{,}5$?

b) Dla jakich liczb naturalnych podstawionych w miejsce a rozwiązaniem równania jest liczba całkowita?

c) Wyznacz wszystkie liczby a, dla których rozwiązaniem równania będzie liczba większa od 2.

Zadanie 2. Wykaż bez kalkulatora, że:

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{20} > \frac{1}{2}$,

b) $\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{30} > \frac{1}{3}$,

c) $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{40} > 1$.

Zadanie 3. Podczas rajdu samochodowego ORLI SZLAK Bob prowadził przed Romusem. Na ostatnim etapie o długości 450 km Bob osiągnął prędkość średnią 150 km/h, natomiast Romus 151 km/h i wygrał rajd. Po ogłoszeniu wyników okazało się, że różnica czasów Romusa i Boba na mecie rajdu była dwa razy większa od czasu, jaki miał do odrobienia Romus. Jaka różnica czasów była na mecie?

Zadanie 4. Punkty A, B i C należą do okręgu. Cięciwa AB ma długość 14 dm, AC — 10 dm, a odległość punktu C od prostej AB wynosi 6 dm. Jaką długość ma cięciwa BC?

Zadanie 5. Kwadrat $ABCD$ ma bok o długości 2 cm.

a) Wykreśl okrąg o promieniu 1,5 cm tak, aby okrąg ten miał z każdym bokiem kwadratu jeden punkt wspólny.

b) Rozstrzygnij, jaką długość może mieć promień okręgu, wiedząc, że okrąg ma jeden punkt wspólny z każdym bokiem tego kwadratu?

(Zawody wojewódzkie 2001 r.)

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA

Zestaw 1

Zadanie 1. **a)** Spełniona jest tylko równość $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$, bo

$\sqrt{3\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{9 \cdot \frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$.

b) Np. $\sqrt{25\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$; znajdź inne przykłady.

Zadanie 2. Równość $\frac{a+1}{b+x} = \frac{a}{b}$ jest spełniona, gdy $x = \frac{b}{a}$.

Zadanie 3. Niech c oznacza cenę towaru przed podwyżkami. Cena ta spełnia równanie $\frac{c+2}{c} = \frac{c+4{,}1}{c+2}$. Stąd $c = 40$. Cena towaru po obydwu podwyżkach wynosiła 44,10 zł. Podnoszono ją za każdym razem o 5%.

Zadanie 4. Objętość kamienia wynosiła: $(40 \cdot 64 \cdot 0{,}2)\ \mathrm{cm}^3 = 512\ \mathrm{cm}^3$. Poziom wody w akwarium Kamila podniósł się o $x = \frac{512}{50 \cdot 80}\ \mathrm{mm} = 1{,}28\ \mathrm{mm}$.

Zadanie 5. Promień okręgu r spełnia warunek: $\frac{\sqrt{3}}{6} < r < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zestaw 2

Zadanie 1. **a)** $a = -11$. **b)** $a = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7$.
c) Wszystkie liczby a spełniają warunek: $1 < a < 4$.

Zadanie 2. **a)** Suma ma 10 składników, z których jeden wynosi $\frac{1}{20}$, a każdy z pozostałych jest większy od $\frac{1}{20}$, zatem ich suma jest większa od $\frac{10}{20}$, czyli większa od $\frac{1}{2}$.

b) Suma składników jest większa od $\frac{10}{30}$, czyli większa od $\frac{1}{3}$.

c) Suma 10 początkowych składników jest większa od $\frac{1}{2}$, suma 10 następnych składników jest większa od $\frac{1}{3}$, a suma ostatnich 10 składników jest większa od $\frac{1}{4}$. Zatem suma wszystkich składników jest większa od $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, czyli jest większa od 1.

Zadanie 3. Niech t oznacza czas w godzinach, który miał do odrobienia Romus. Z warunków zadania wynika, że $2t=\frac{450}{150}-\frac{450}{151}$, czyli $t=\frac{3}{302}$. Romus wygrał rajd z przewagą $\frac{3}{302}$ godziny nad Bobem.

Zadanie 4. Długość cięciwy BC wynosi $6\sqrt{2}$ dm.

Zadanie 5. **a)** Okrąg ten ma środek w punkcie O, który dzieli przekątną AC na odcinki $|AO|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm i $|CO|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm, a promieniem jest odcinek o długości 1,5 cm. Okrąg ten jest styczny do boków BC i CD.

b) Długość r promienia okręgu spełnia warunek: $1 \le r \le 2$, natomiast środek O okręgu należy do przekątnej np. AC kwadratu $ABCD$ i dzieli ją na odcinki o długościach: $|AO|=(2-r)\sqrt{2}$ cm i $|CO|=r\sqrt{2}$ cm. Gdy $r=1$ cm, wtedy okrąg jest wpisany w kwadrat $ABCD$; gdy $r=2$ cm, środkiem okręgu jest np. wierzchołek A kwadratu, a boki AB i BC mają z okręgiem wspólny punkt (wierzchołek) B, boki AD i CD — punkt D.