Witold Bednarek

Jeśli lubisz matematykę

Część 2

Opole 2010

Od Autora

Książka jest kontynuacją zbioru miniatur matematycznych, które ukazały się w roku 2009. Ponieważ cieszyły się one powodzeniem u Czytelników, postanowilismy opublikować nowe, mam nadzieję, że równie ciekawe zagadnienia dotyczące geometrii, teorii liczb, algebry, trygonometrii, rachunku prawdopodobieństwa i analizy matematycznej. Większość poruszanych tematów jest napisanych w formie artykułów. Niektóre z nich były zamieszczone na łamach czasopism „Matematyka" i „Magazyn Miłośników Matematyki".

Mam nadzieję, że Czytelnik z chęcią pozna przedstawione tu matematyczne szkice i stwierdzi, że matematyka może być zajmującą dziedziną wiedzy.

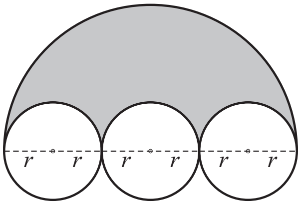
Witold Bednarek

1

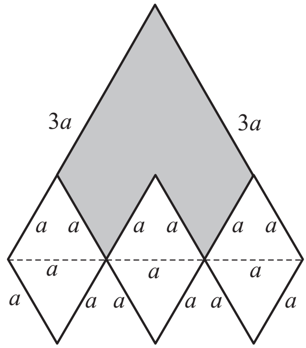
Co jest większe?

Który z obszarów ma większe pole: szary czy biały?

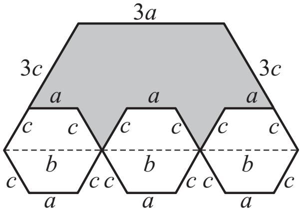
a)



b)



c)



Pole obszaru szarego jest równe polu obszaru białego we wszystkich przedstawionych przykładach. Nie trzeba przy tym trudzić się żmudnymi rachunkami – można to zrobić „za jednym zamachem".

Niech B oznacza, w zależności od przykładu, pole małego białego: półkola, trójkąta równobocznego lub trapezu równoramiennego. Wówczas pole całego obszaru białego wynosi oczywiście

$$P_b = 6B.$$

Pole dużego półkola (trójkąta równobocznego, trapezu równoramiennego) wynosi $9B$, gdyż skala podobieństw małych i dużych figur jest równa 3. Zatem pole obszaru szarego wynosi

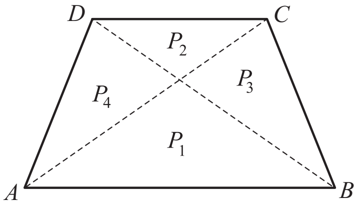
$$P_s = 9B - 3B = 6B.$$

Wobec tego $P_b = P_s$.

2

Podział trapezu

Rozważmy trapez $ABCD$ podzielony przez przekątne na cztery trójkąty o polach P_1, P_2, P_3, P_4 (rys. 1):



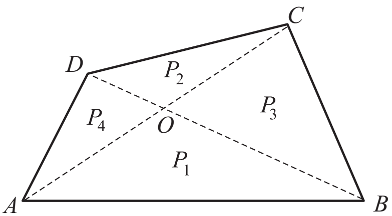
Rys. 1

Pola trójkątów ABC i ABD są równe (dlaczego?), a zatem

$$P_1 + P_3 = P_1 + P_4, \quad \text{skąd}$$

(1) $$P_3 = P_4.$$

Rozważmy teraz dowolny czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 2):



Rys. 2

Ponieważ trójkąty ABO i CBO mają taką samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka B, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi ich podstaw:

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{|AO|}{|CO|}$$

21

Rozkłady dwumianów

Zachodzą następujące rozkłady dwumianu $x^n - 1$ dla kolejnych liczb naturalnych n:

$$x^1 - 1 = x - 1,$$

$$x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1),$$

$$x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1),$$

$$x^4 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1),$$

$$x^5 - 1 = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

$$x^6 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1),$$

$$x^7 - 1 = (x-1)\cdot(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1),$$

$$x^8 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1),\ \text{itd.}$$

Podane rozkłady są ostateczne, tzn. powyższe czynniki wielomianowe są już nierozkładalne na wielomiany o współczynnikach całkowitych.

Wielomian

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

nazwiemy wielomianem o małych współczynnikach wtedy,
gdy $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

Tak więc przestawione rozkłady są rozkładami ostatecznymi o małych współczynnikach.

Przykład 1

Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dwumian

$$x^p - 1$$

rozkłada się ostatecznie na iloczyn

$$(x-1)\cdot(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1).$$

Widzimy tu rozkład o małych współczynnikach, przy czym drugi czynnik jest już nierozkładalny, co można udowodnić, korzystając z następującego kryterium: jeśli liczba pierwsza

1. p nie dzieli a_n
2. p dzieli $a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$,
3. p^2 nie dzieli a_0,

to wielomian $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ jest nierozkładalny.

W naszym przypadku wprowadzamy podstawienie $t = x - 1$ i mamy

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x-1} = \frac{(t+1)^p - 1}{t} =$$

$$= t^{p-1} + \binom{p}{p-1} t^{p-2} + \ldots + \binom{p}{2} t + \binom{p}{1}.$$

Ponieważ (jak można łatwo wykazać) p dzieli $\binom{p}{i}$ dla $i = 1, \ldots, p-1$ i p^2 nie dzieli $\binom{p}{1} = p$, więc na mocy powyższego kryterium stwierdzamy, że nasz wielomian jest nierozkładalny.

Przykład 2

Niech $n = 2^k$ ($k \in N,\ k > 1$). Dwumian $x^n - 1$ rozkłada się na iloczyn czynników nierozkładalnych z małymi współczynnikami:

$$x^{2^k} - 1 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(x^{2^{k-1}}+1).$$